गणित : छंद - आनंद

वर्ष 7 वे अंक 25, जानेवारी - 2010

बोधन्तो वै नवं नित्यम्
संततं बोधयामहे

अनुक्रमणिका

संपादकीय...

वाचकहो, हा पंचविसावा अंक आहे. म्हणजे या त्रैमासिकाने सहा वर्ष पूर्ण करून सातव्या वर्षात पदार्पण केले आहे. शालेय स्तरावरील गणितासंदर्भात निरनिराळ्या माहितीने युक्त असे बरेच साहित्य आजपर्यंत देण्याचा प्रयत्न केला आहे. शिक्षकांनी, पालकांनी, विद्यार्थ्यांनी आणि गणितात रस असणाऱ्या अनेकांनी अधिकाधिक साहित्य पाठविण्याविषयी विनंती आहे.

गेल्या चोवीस अंकांसाठी ज्यांनी ज्यांनी प्रत्यक्ष, अप्रत्यक्ष विविध प्रकारची जी मदत केली त्याबद्दल मी आपला आभारी आहे.

श्री.नागेश शंकर मोने

(जानेवारी 2010)
(अंक 25, पृष्ठ 2 ते 4)

विभाज्यतेचे कांही सोपे ठोकताळे

प्रा. सुधाकर रामचन्द्र जोशी*

विभाज्यता ही संकल्पना सर्व हायस्कूलच्या विद्यार्थ्यांना परिचित असून, n या दिलेल्या संख्येस (n हा धन पूर्णांक आहे हे गृहित धरले आहे) m या दुसऱ्या संख्येने (m सुद्धा धनपूर्णांक आहे) भाग जातो की नाही या संबंधीच्या काही कसोट्या किंवा नियम सुद्धा बऱ्याच विद्यार्थ्यांना माहीत आहेत. विशेषत: खालील दिलेले नियम सर्व परिचित आहेत.

नियम 1 : n मधील शेवटच्या दोन अंकापासून तयार झालेल्या संख्येस जर 4 ने भाग जात असेल तर n ला सुद्धा 4 ने भाग जातो.

नियम 2 : n मधील शेवटच्या तीन अंकापासून तयार झालेल्या संख्येस (अर्थात क्रम तोच ठेऊन व डावीकडून उजवीकडे गेल्यास) जर 8 ने भाग जात असेल तर, n ला सुद्धा 8 ने भाग जातो.

नियम 3 : n मधील शेवटचे 2 अंक 00, 25, 50, किंवा 75 असे असतील तर n ला 25 ने भाग जातो.

नियम 1 च्या बाबतीत प्रश्न असा निर्माण होऊ शकतो की दोन अंकी संख्येस 4 ने भाग जाण्याचा निकष काय आहे. तसेच नियम 2 च्या संदर्भात एखाद्या 3 अंकी संख्येस 8 ने भाग जाण्याचा निकष काय आहे ?

प्रस्तुत लेखांत हे दोन्ही निकष कोणते आहेत हे सोदाहरण दिले आहेत. तसेच n या दिलेल्या संख्येस 75 ने भाग केव्हा जातो यासंबंधीही विवेचन केले आहे. या लेखात संख्या म्हणजे धनपूर्णांक किंवा 0 ही संख्या असे गृहित धरले आहे. तसेच a, b, c, d हे 0 ते 9 पैकी कोणतेही अंक असतील तर cd, bcd व abcd यांचा अर्थ खाली दिल्याप्रमाणे आहे, हे देखील गृहित धरू.

cd = 10 x c + d,
bcd = 100 x b + 10 x c + d व
abcd = 1000 x a + 100 x b + 10 x c + d

सोईसाठी कांही ठिकाणी 10 x c, 100 x b व 1000 x a साठी 10c, 100b व 1000a या संक्षिप्त चिन्हांचा ही आपण वापर करणार आहोत. तसेच जेव्हा आपण n च्या नांवाखाली एखादा पूर्णांक विचारात घेऊ तेव्हां n मधील सहस्त्रस्थानचा, शतंस्थानाचा क, दशमस्थानचा व एकम्स्थानचे अंक अनुक्रमे a, b, c व d असेच गृहित धरू.

लेखाला परिपूर्णता आणण्यासाठी शेवटी विभाज्यता या संकल्पनेची व्याख्या व त्यासाठी लागणारे चिन्ह यांचा विचार करू.

समजा n ही दिलेली संख्या असून m ही शून्येतर संख्या आहे असे गृहित धरा. जर n ला m च्या पटीत मांडता आले तर m ने n ला भाग जातो किंवा n ही m साठी विभाजित संख्या आहे असे म्हटले जाते, व ही बाब m | n या चिन्हाने व्यक्त केली जाते.

उदाहरणार्थ, 4 | 312 , कारण 312 = 4 x 78,
8 | 688 , कारण 688 = 8 x 86,
5 | 0 , कारण 0 = 5 x 0

8, 'कर्मयोग', तारक कॉलनी, रामकृष्ण मिशन आश्रमासमोर, पेट्रोल पंपाच्यामागे, बीड वळण रस्ता, औरंगाबाद - 431005.

शेवटच्या उदाहरणाचा अर्थ 0 ला 5 ने भाग जातो किंवा 0 ही 5 ची 0 पट आहे असा घेतला जातो. m ने n ला भाग जात नसेल तर $m \nmid n$ या चिन्हाचा वापर केला जातो. उदा. $4 \nmid 62$, $75 \nmid 625$.

आता आपण cd ला 4 ने व bcd ला 8 ने भाग जाण्यासाठीचे कोणते ठोकताळे आहेत याचा विचार करू.

ठोकताळा क्र. 1 :- जर (i) c ही विषमसंख्या असेल व d = 2 किंवा 6 असेल.

किंवा (ii) c ही समसंख्या व d = 0, 4 किंवा 8 असेल तर आणि तरच 4 | cd.

उदाहणार्थ :- 4 | 12, 4 | 36, 4 | 92 वगैरे

तसेच 4 | 28, 4 | 84, 4 | 68, 4 | 08 वगैरे

पण $4 \nmid 62$, $4 \nmid 38$, $4 \nmid 54$ कारण

विधान (i) किंवा (ii) यापैकी एकाची सुद्धा पूर्ती होत नाही.

उपरोक्त ठोकताळ्याचे दोन भाग आहेत. दोन्ही वेळेस d मात्र समसंख्या आहे. पण (i) साठी c ही विषमच संख्या असली पाहिजे व (ii) साठी c ही समसंख्याच असली पाहिजे. हा ठोकताळा लक्षात ठेवावयास अवघड नाही. या ठोकताळ्याचा उपयोग करून कोणत्याही दिलेल्या n या संख्येसाठी n ला 4 ने भाग जातो किंवा जात नाही हे नियम 1 चा उपयोग करून निश्चित सांगता येते.

उदाहरणार्थ :-

4 | 2104, 4 | 5736, 4 | 152, 4 | 2628 पण

$4 \nmid 2226$, $4 \nmid 3102$, $4 \nmid 5438$ इ.

ठोकताळा क्र. 2 : खालील विधाने लक्षात घ्या.

iii) 8 | cd व b ही कोणतीही समसंख्या आहे.

iv) 4 | cd पण $8 \nmid cd$ आणि b ही कोणतीही विषमसंख्या आहे.

वर उल्लेख केलेल्या दोनपैकी कोणतेही एक विधान सत्य असेल तर आणि तरच 8 | bcd

उदाहरणार्थ :- 8 | 224, 8 | 656, 8 | 352 वगैरे

पण $8 \nmid 844$, $8 \nmid 348$, $8 \nmid 428$ इ.

ठोकताळा क्र.1 प्रमाणे याही ठोकताळ्याचे दोन भाग आहेत. एका भागांत b ही समसंख्या तर दुसऱ्या भागात b ही विषमसंख्या आहे. या ठोकताळ्याचा उपयोग करून n या दिलेल्या संख्येस नियम 2 चा उपयोग करून 8 ने भाग जातो किंवा नाही हे पटकन सांगता येते.

आता आपण n ला 75 ने भाग केंव्हा जातो या संबंधीचा ठोकताळा पाहू.

ठोकताळा क्र.3 :

n या संख्येतील दशमस्थानचा अंक c व एकम स्थानचा अंक d आहे हे गृहित धरू. तसेच n मधील सर्व अंकांची बेरीज S आहे. हे गृहित धरू जर cd = 25 किंवा 50 किंवा 75 किंवा 00 असेल आणि S ला 3 ने भाग जात असेल तर आणि तरच n ला सुद्धा 75 ने भाग जातो.

उदाहरणार्थ : 75 | 675, 75 | 21450, 75 | 1125

इ. कारण प्रत्येक वेळेस अंकाच्या बेरजेस 3 ने भाग जातो. पण 75 ∤ 775, 75 ∤ 350, 75 ∤ 4325, कारण यातील कोणत्याच संख्येसाठी अंकाच्या बेरजेस 3 ने भाग जात नाही.

वर दिलेली सर्व ठोकताळे एक प्रकारचे प्रमेये किंवा सिद्धांत असून ते सिद्धही करता येतात. आपण फक्त ठोकताळा क्र.1 ची सिद्धता देणार आहोत. उरलेल्या दोन्ही ठोकताळ्याची सिद्धता देण्याचा प्रयत्न रसिक वाचकाने करावा अशी अपेक्षा आहे.

ठोकताळा क्र.1 :

सिद्धता : भाग (i) d = 2 किंवा 6 आहे व c हा विषम अंक आहे. समजा c = 2a + 1 येथे a हा कोणताही अंक असू शकतो. म्हणून cd = 10 x (2a + 1) + 2 (किंवा + 6) = 20a + 12 (किंवा 20a + 16). आता 4 | 20a, 4 | 12 व 4 | 16 म्हणून विभाज्यतेच्या नियमानुसार 4 | cd हे सिद्ध होते.

भाग (ii) : या भागात c ही सम संख्या असल्यामुळे c साठी 2a ही संख्या गृहीत धरू शकतो. तसेच d = 0, 4 किंवा 8 असल्यामुळे d च्या जागी आपण 4x ही संख्या घेऊ शकतो. येथे a = 0, 1,2,3 किंवा 4 हे अंक असू शकतात. तसेच x ची किंमत 0, 1 किंवा 2 असू शकते. त्यामुळे प्रत्येक बाबतीत cd, 10 x (2a) + 4x असे लिहिता येते. म्हणजेच cd = 20a + 4x = 4 (5a + x) असे समीकरण मिळते. म्हणून cd चा 4 हा अवयव आहे हे स्पष्ट होते. म्हणजेच 4 | cd हे सिद्ध होते.

✲ ✲ ✲ ✲

Mathematicians are like Frenchmen : whatever you say to them they translate into their own language and forthwith it is something entirely different.

- Gothe

❖

It has long been an axiom of mine that the little things are infinitely the most important.

- Sir Arthur Doyle

पुढील अंकात

1. टिकेकरीय (21) .... डॉ.व.ग.टिकेकर
2. फिबोनाशी मालिका, संख्या आणि भूमिती .... श्री.प्रसन्न भोरे
3. परिचय करून घेऊया वैदिक गणिताचा (13) .... श्री.दिलीप गोटखिंडीकर
4. सोडवून तर पहा (एप्रिल 2010)
5. सिद्धता.. श्री.नागेश मोने
6. पुस्तक परिचय (How to teach Mathematics - Steven Krantz) ..... श्री.नागेश मोने
7. आणखी बरेच काही

(जानेवारी 2010)
(अंक 25, पृष्ठ 5 ते 7)

परिचय करून घेऊया वैदिक गणिताचा (12)

दिलीप गोटखिंडीकर*

वैदिक गणितामध्ये एकूण 16 सूत्रे आणि 13 उपसूत्रे आहेत हे आपल्याला माहीत आहेच. त्यापैकी एक सूत्र 'एकाधिकेन पूर्वेण' हे असून एक उपसूत्र 'वेष्टनम् (Vestanas = Osculators)' असे आहे. प्रत्येक सूत्राची अनेकविध उपयोजने असून उपसूत्रांचाही उपयोग विविध गणन क्रियांमध्ये करता येतो. 'एकाधिकेन पूर्वेण' आणि 'वेस्टनम्' यांचा उपयोग काही 'विभाज्यतेच्या कसोट्यांसाठी' कसा होतो याची माहिती आपण करून घेणार आहोत.

पुढील सारणीचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा

संख्या	09	19	29	39	49	59	69	79	89	99	...
संख्येतील दशकांची संख्या	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
एकाधिकेन पूर्वेण	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
■ संख्येचे वेष्टनम्	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

या सारणीमध्ये आपण ज्या संख्यांच्या एकक स्थानी नऊ हा अंक आहे अशा संख्या विचारात घेतलेल्या आहेत. संख्येतील दशकांची संख्या लक्षात घेऊन त्या संख्यांचे 'एक अधिकेन पूर्वेण' निश्चित केले आहेत. या सारणीवरून असे म्हणता येते की (ज्या एकक स्थानी 9 हा अंक आहे) 09, 19, 29,... या सर्व संख्यांचे एकाधिकेन पूर्वेण आणि वेष्टनम् समान असून ते अनुक्रमे 1, 2, 3... आहेत.

या संख्याचे वेष्टनम् = दशकांची संख्या + 1 = एकाधिकेन पूर्वेण

आता आपण संख्या आणि त्यांचे वेष्टनम् यांचा उपयोग त्या संख्येची विभाज्यतेची कसोटी ठरविण्यासाठी कसा होतो ते समजून घेऊ. यासाठी आपण प्रथम एक सोपे उदाहरण घेऊ. 09 या संख्येचे वेष्टनम् 1 आहे.

9 ची विभाज्यतेची कसोटी :- दिलेल्या संख्येतील एकक स्थानच्या अंकाची 'एकपट (वेष्टनम् पट)' त्याच संख्येतील दशकांच्या संख्येत मिळवली असता येणारी बेरीज नऊ (किंवा नऊच्या पूर्ण पटीतील) असेल तर त्या दिलेल्या संपूर्ण संख्येला नऊने निःशेष भाग जातो.

आता आपण या नियमाचे उपयोजन असलेली काही उदाहरणे पाहू. 67, 245, 3762, 508413465 यापैकी कोणत्या संख्यांना 9 ने निःशेष भाग जातो ते निश्चित करू.

1) $67 \rightarrow 6 + 7 \times 1 = 13$ आणि
$13 \rightarrow 1 + 3 \times 1 = 4$

म्हणून 67 या संख्येला 9 ने निःशेष भाग जात नाही कारण संख्येतील

दशकांची संख्या + (एककांची संख्या x संख्येचे वेष्टनम्)

*gotkhindikar@rediffmail.com

या बेरजेला (म्हणजे 13 किंवा 4) नऊने भाग जात नाही.

2) 245 → 24 + 5 x 1 = 29;
29 → 2 + 9 x 1 = 11,
11 → 1 + 1 x 1 = 2

'दशकांची संख्या + (एककांची संख्या x संख्येचे वेष्टनम्)' या बेरजेला म्हणजे 29, 11 किंवा 2 या संख्या नऊच्या पूर्ण पटीत नाहीत म्हणून 245 या संख्येला नऊने निःशेष भाग जात नाही.

3) 3762 → 376 + 2 x 1 = 378
378 → 37 + 8 x 1 = 45
45 → 4 + 5 x 1 = 9

'दशकांची संख्या + (एककांची संख्या x संख्येचे वेष्टनम्)' या बेरजेने मिळणाऱ्या संख्या अनुक्रमे 378, 45 आणि 9 या आहेत आणि या सर्व संख्यांना नऊने निःशेष भाग जातो म्हणून 3762 या संख्येला नऊने निःशेष भाग जातो. या पद्धतीने 50, 84, 13, 465 या संख्येलाही नऊने भाग जातो असे निश्चित करता येते. परंतु वरील पद्धतीचा उपयोग नऊच्या विभाज्यतेच्या कसोटीसाठी जवळचा (Short-cut) नाही. परंतु केवळ नियमाचे आकलन करून घेण्यासाठी 'नऊच्या विभाज्यतेच्या कसोटीचे' उदाहरण येथे घेण्यात आलेले आहे. सध्या प्रचलित असलेली 9 ची विभाज्यतेची कसोटी खूपच सरळ आणि आकलन सुलभ आहे.

प्रचलित कसोटी :

i) दिलेल्या संख्येतील सर्व अंकांची बेरीज नऊ (किंवा नऊच्या पूर्ण पटीतील) असेल तर दिलेल्या संख्येला नऊने निःशेष भाग जातो.

किंवा

ii) दिलेल्या संख्येचे 'अंकमूळ (Digital Root)' नऊ असेल तर त्या संख्येला नऊने निःशेष भाग जातो. (अंकमूळ म्हणजे संख्येतील अंकांची एकअंकी बेरीज)

यानंतर आपण 19 चे वेष्टनम् आणि 19 ची विभाज्यतेची कसोटी लक्षात घेऊ. त्यासाठी पुढील सारणीचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा. (19 चे वेष्टनम् = एकाधिकेण पूर्वेण = दशकांची संख्या + 1 = 02)

19 चा पाढा	दशकांची संख्या + एककस्थानचा अंक x 19 चे वेष्टनम्
19	1 + 9 x 2 = 19
38	3 + 8 x 2 = 19
57	5 + 7 x 2 = 19
76	7 + 6 x 2 = 19
95	9 + 5 x 2 = 19
114	11 + 4 x 2 = 19
133	13 + 3 x 2 = 19
152	15 + 2 x 2 = 19
171	17 + 1 x 2 = 19
190	19 + 0 x 2 = 19

या सारणीवरून आपल्या असे लक्षात येते की, एकोणीसच्या पाढ्यातील कोणत्याही संख्येच्या एककस्थानच्या अंकाची दुप्पट त्याच संख्येच्या दशकांच्या संख्येत मिळवली असता प्रत्येक वेळी येणारी बेरीज 19 आहे. यावरून आपल्याला 19 च्या विभाज्यतेची एक कसोटी सहज समजावून घेता येईल.

19 च्या विभाज्यतेची कसोटी : दिलेल्या संख्येतील एकक स्थानच्या अंकाची दुप्पट (19 चा वेष्टनम् 02 आहे.) त्याच संख्येतील दशकांच्या संख्येत मिळविली असता येणारी बेरीज 19 (किंवा 19 च्या पूर्ण पटीतील) असेल तर दिलेल्या संख्येला 19 ने निःशेष भाग जातो.

आता आपण 19 च्या विभाज्यतेची कसोटी काही उदाहरणांच्या मदतीने समजावून घेऊ. 9478, 180139 व 363146157 यापैकी कोणत्या संख्यांना 19 ने निःशेष भाग जातो ?

1) 9478 $\rightarrow$ 947 + 8 x 2 = 963
963 $\rightarrow$ 96 + 3 x 2 = 102
102 $\rightarrow$ 10 + 2 x 2 = 14

येथे 9478 ला 19 ने निःशेष भाग जात नाही असे निश्चितपणे म्हणता येते कारण 963, 102 किंवा 14 यापैकी एकही संख्या 19 च्या पूर्ण पटीतील नाही. 963, 102 किंवा 14 या संख्या (दशकांची संख्या + एकक स्थानच्या अंकाची दुप्पट) या सूत्राने मिळालेल्या संख्या आहेत.

2) 180139 $\rightarrow$ 18013 + 9 x 2 = 18031
18031 $\rightarrow$ 1803 + 1 x 2 = 1805
1805 $\rightarrow$ 180 + 5 x 2 = 190
190 $\rightarrow$ 19 + 0 x 2 = 19

येथे 19, 190, 1805 किंवा 18031 या सर्व संख्या एकोणीसच्या पूर्ण पटीतील आहेत. येथे दशकांची संख्या आणि एकक स्थानच्या अंकाची दुप्पट यांच्या बेरजेने मिळणाऱ्या संख्या 19 च्या पूर्ण पटीतील असल्यामुळे 180139 या संख्येला 19 ने निःशेष भाग जातो असे निश्चितपणे म्हणता येते. तसेच 363146157 या संख्येलाही 19 ने निःशेष भाग जातो असे एकोणीसच्या विभाज्यतेची कसोटी वापरून ठरविता येते.

दोन किंवा अधिक अंकी संख्या आपण (10 x + y) या स्वरूपात लिहू शकतो. जर एकस्थानचा अंक 9 असेल तर (10 x + y) या संख्येचे वेष्टनम् (दशकस्थानचा अंक + 1) हा x + 1 आहे. म्हणजेच 10 x + 9 या संख्येचे वेष्टनम् x + 1 आहे आणि दशकांची संख्या x आहे. दशकांची संख्या आणि एकक स्थानच्या अंकाची (x + 1) पट यांची बेरीज = [x + 9 (x + 1)] = 10 x + 9 म्हणजे (10 x + y) या संख्येतील y ची किंमत 9 असेल तर x च्या वेगवेगळ्या किंमती घेऊन 19, 29, 39, 49, 59,... इत्यादी संख्यांच्या विभाज्यतेच्या कसोट्या तयार करता येतील.

29 या संख्येचे वेष्टनम् तीन आहे. म्हणून 29 च्या विभाज्यतेची कसोटी पुढीलप्रमाणे :-

29 च्या विभाज्यतेची कसोटी : दिलेल्या संख्येतील एकक स्थानच्या अंकाची तिप्पट त्याच संख्येतील दशकांच्या संख्येत मिळवून येणारी बेरीज जर 29 असेल (किंवा 29 च्या पूर्ण पटीतील असेल) तर दिलेल्या संख्येला एकोणतीसने निःशेष भाग जातो.

याप्रमाणे ज्या संख्यांच्या एकक स्थानी 9 हा अंक आहे त्या संख्यांच्या विभाज्यतेच्या कसोट्या तयार करता येतील आणि विविध उदाहरणांच्या साहाय्याने त्यांचा पडताळाही घेता येईल.

पुढील लेखात आपण ज्या मूळ संख्यांच्या एकक स्थानी 1, 3 किंवा 7 हे अंक आहेत अशा संख्याच्या विभाज्यतेच्या कसोट्या 'वेष्टनम्' या उपसूत्राच्या मदतीने कशा तयार करता येतील ते समजावून घेण्याचा प्रयत्न करू.

✲ ✲ ✲ ✲

(जानेवारी 2010)
(अंक 25, पृष्ठ 8)

दोन कूटप्रश्न

प्रा. मनोहर राईलकर*

(फक्त प्राथमिक आणि माध्यमिक शिक्षकांकरताच)

गणित म्हणजे का ? ह्या शीर्षकाखाली मी तीन लेख लिहिले आहेत. ते आपल्या त्रैमासिकातून क्रमशः प्रसिद्ध झालेलेच आहेत. पण, आता लेख तुम्हा शिक्षकांकरता आहे. तुम्ही मुलांना शिकवता. अनेकदा रीती शिकवता, युक्त्या सांगता, परंपरेनं चालत आलेल्या पद्धतीच्या मांडण्या सांगता, पण त्यामागची कारणं तुम्ही माहीत करून घेण्याचा कधी प्रयत्न केला आहे का ? तसा केलात किंवा जाणकारांना विचारलंत, तर मुलांच्या प्रश्नांना उत्तरं देणं तुम्हाला सोपं जाईल.

आज तुमच्यापुढं मी काही प्रश्न उपस्थित करणार आहे. त्याची उत्तरं तुम्हा माझ्याकडे पाठवायची बरोबर उत्तरं देणाऱ्यांची नावं ह्या कालिकातून प्रसिद्ध केली जातील.

प्र.1: अनेकदा मुलं आपल्याला प्रश्न विचारतात, ‘सर, अपूर्णांकांचा गुणाकार करताना आपण अंशाअंशांचा गुणाकार करतो आणि छेदाछेदांचा गुणाकार करतो. तसं बेरजेत का करीत नाही ?’

तुम्ही त्यांना काय उत्तर देता मला माहीत नाही. पण दोन अपूर्णांकांची बेरीज करतानासुद्धा अंशाअंशांची बेरीज आणि छेदाछेदांची बेरीज करतात. असं उदाहरण मी तुम्हाला देतो. समजा एका परीक्षेत प्रत्येकी 50 गुणांचे दोन विभाग आहेत. एका मुलाला एका विभागात 35/50 गुण आणि दुसऱ्या विभागात 45/50 गुण मिळाले. तर एकूण त्याला (35 + 45) / (50 + 50) = 80 / 100 गुण मिळाले असं म्हणता की नाही ? म्हणजे अंशाअंशांची बेरीज आणि छेदाछेदांची बेरीजच केली की नाही ?

इतकंच कशाला साताठ विषय असतील तर सर्वच विषयांच्या अंशांची बेरीज करून तिला सर्व छेदांच्या बेरजेनंच भागतात की नाही ? तर आता प्रश्न असा. असं तर आपण नेहमीच करीत आलो आहोत. पण, ह्याचं तर्काला पटेल असं काही स्पष्टीकरण देता येतं का ? की ‘नेहमी असंच करतात म्हणून आम्हीही करतो’, हेच उत्तर ?

प्र.2 : पुढील भागाकारांचं निरीक्षण करा. तुम्ही शाळेत मुलांना देता तसं त्यांचं स्पष्टीकरण तुम्ही द्यावं, अशी माझी अपेक्षा आहे. तुमच्याकडून खुलासे आले की मग मी प्रश्न विचारीन. जसा खुलासा तुम्ही मुलांना देता तसा दिलात तरी चालेल.

```
     2 4 6
3 ) 7 3 8
   -6
    1 3
   -1 2
      1 8
     -1 8
      0 0
```

इथं मी एक भागाकार करून दाखवला आहे. तुम्ही त्यातल्या पायऱ्यांचा खुलासा द्यायचा. मग मी त्यावर प्रश्न विचारीन. मुलांना वर्गात सांगताना / शिकवताना जसं सांगता तसा खुलासा द्या. तुम्हाला पाहिजे असल्यास तुम्ही दुसरा कोणता तरी भागाकार करून त्याचा खुलासा दिलात तरी चालेल.

(महाविद्यालयांतल्या प्राध्यापकांनी ह्यांत भाग घेण्याची अपेक्षा नाही.)

✲ ✲ ✲ ✲

*मृण्मयी, जेधेनगर, बिबवेवाडी, पुणे - 37. (दूरध्वनी 020 - 24220566)

(जानेवारी 2010)
(अंक 25, पृष्ठ 9 ते 18)

परवा एक गंमतच झाली !

श्री.श्री.ग.गोखले*

नेहमीप्रमाणे 'रूटीन' चालू होते. गणित छंद आनंद त्रैमासिकाचा जोड अंक क्र.23, 24 मिळाला. सहजपणे 'चाळला' आणि परत 'रूटीन'मधे अडकलो. दुसरे दिवशी मात्र अंक नीट 'वाचला' आणि सवयीनुसार 'सोडवून तर पहा' मधील प्रश्नांची उत्तरे शोधू लागलो. यावेळी A, B, C, D, E असे पाच प्रश्न होते, पण ते एकत्र नव्हते. पान 18 वर A, 30 वर B आणि 33 वर C, D, E. त्यातल्या पहिल्याच प्रश्नानं फार डोकं खाल्लं ! प्रश्न दिसायला सोपा आणि नेहमीच्या अनुभवातला होता, तो असा, ''एका संख्येला 3 ने भाग जात असेल तर त्या संख्येतील अंकांच्या बेरजेलाही 3 ने भाग जातो, हे सिद्ध करा.''

आता हा प्रश्न म्हणजे 3 च्या विभाज्यतेच्या कसोटीचा व्यत्यास होता. कसोटी सर्वांना माहिती आहेच. आपण नेहमी वापरत आलो आहोत. एकदा त्याची कारणमीमांसाही वाचनात आली होती. पण व्यत्यासाचा विचारच केला नव्हता, तेव्हां त्याच्या सिद्धतेचा विचार दूरच राहिला. असो.

आता 'गरज' निर्माण झाली. कुणीसे म्हंटले आहेच की, 'गरज ही शोधाची जननी आहे.' अशी सातत्याने 'गरज' निर्माण करत राहिल्याबद्दल 'गणित छंद आनंद' आणि 'गणित शिक्षण' या दोन्ही त्रैमासिकांना धन्यवाद !

अशा गरजांच्या पूर्ततेच्या प्रयत्नात मी काही शोध वगैरे लावला नाही. पण तो लावण्यासारखा किंचित अनुभव, आनंद मात्र सातत्यानं मिळवत राहिलोय. असो. प्रयत्न चालू होते पण यश, समाधान मिळत नव्हते.

रात्री झोपताना नातवंडांचा गोष्टीचा हट्ट काही वेळा पुरवावा लागतो. त्यात आनंदच असतो. आज त्यांना एक चातुर्यकथा सांगितली. 'घोडा अडला, भाकरी करपली आणि नागवेलीची पानं कुजली. कारण एकच ! तर ते कोणतं ?' गोष्टीतल्या चतुरानं दिलेलं उत्तर, 'फिरवले नाही म्हणून' आता गोष्ट रंगवली कशी ते सविस्तर सांगत बसत नाही. कारण खरी गंमत पुढेच आहे. गोष्ट ऐकता ऐकता झोप येण्याऐवजी त्यांच्या प्रश्नांनीच माझी झोप उडवली कारण हल्ली मुलांना घोडा पहायला तरी कुठे मिळतो ? पाहिला तर मिरवणुकीत, चित्रात, चित्रपटात नाहीतर महाबळेश्वर माथेरानसारख्या ठिकाणी गेल्यावर ! गॅस आणि नॉनस्टिक तव्याच्या जमान्यात करपणारी राहू द्या, नुसती भाकरी पहायची तर मुद्दाम विकत आणावी लागते ! कारण घरोघरी चपात्यांचं राज्य ! आणि विड्याच्या पानांचा वेल असतो, त्याला नागवेली म्हणतात, हे तरी त्यांना कोण कधी सांगतं ? असो. आमच्या नातवंडात 'चिंटू' मात्र हुशार बरं का ! तो म्हणाला, 'आजोबा, त्यापेक्षा खेळण्यातला घोडा अडला, मोबाईल रूसला, आणि टॉर्चचा दिवा लागला नाही ! कारण एकच ! तर ते कोणतं ? असा प्रश्न हवा होता' 'मिनी तितकीच हुश्शार ! ती लगेच म्हणाली, 'बॅटरी डाऊन झाली म्हणून !' आता त्यांची बॅटरी आणखी पॉवरफुल होणारसे दिसू लागल्यावर 'रामरक्षा' म्हणण्याला सुरवात केली आणि रामरक्षा म्हणता म्हणता सर्वजण झोपी गेलो.

झोपेत पहाटे मला एक भन्नाट स्वप्न पडलं. 'ध्यानी मनी ते स्वप्नी' म्हणतात ते काही खोटे नाही ! स्वप्नात बिरबल, बादशहाच्या गोष्टीतला दरबार भरला होता. बादशहाच्या जागी आपले य.धों.कुलकर्णी सर होते आणि त्यांनी प्रश्न उपस्थित केला, 'N या संख्येतील अंकांची बेरीज M आहे, तर M किंवा N ला 3 ने भाग जात असेल किंवा नसेल तर अनुक्रमे N किंवा M लाही 3 ने भाग जातो किंवा जात नाही. कारण एकच ! तर ते कोणतं ?' झालं ! दरबारात चुळबुळ सुरू झाली. बरेच विद्वान लोक जमले होते.

*689/4 प्लॉट नं.15 पद्म सहकारी सोसायटी, बिबवेवाडी, पुणे 411037

एकेक जण येऊन आपापले उत्तर पटवून देत होता. पण बादशहाचे समाधान होत नव्हते. शेवटी बिरबलाच्या उत्तरानं बादशहाचं समाधान झालं. बिरबलाचं उत्तर होतं, 'बाकी समान उरते म्हणून'. बादशहा खुष झाला मग बिरबलनंच एक प्रश्न उपस्थित केला, 'मी दिलेलंच उत्तर असेल असा बादशहांच्या प्रश्नासारखा दुसरा प्रश्न कोणता ?' शांतता ! बराच वेळ शांतता. कोणालाच उत्तर येत नव्हतं आणि अचानक मला उत्तर सुचलं व मी जोरात ओरडलो, '3 ऐवजी 9 घ्यायचे !' '3 ऐवजी 9 घ्यायचे'

आजोबा ! आजोबा ! नातवंड मला हालवून उठवत होती. मी दचकून जागा झालो. आता नातवडांना काय सांगणार ! पण तुम्हाला सांगतो. सांगू कशाला ! लिहीतोच ! 8 in 1 ! N या संख्येतील अंकांची बेरीज M असताना

1)जर 3/N तर 3/M　　2) जर 3/M तर 3/N

3) जर $3 \nmid N$ तर $3 \mid M$　　4) जर $3 \nmid M$ तर $3 \nmid N$

5) जर 9/N तर 9/M　　6) जर 9:M तर 9/N

7) जर $9 \nmid N$ तर 9M　　8) जर $9 \nmid m$ तर $9 \mid N$

या सगळ्यांचे कारण एकच ! N व M यापैकी कोणाही एकाला 3 ने (किंवा 9 ने) भागले तर उरणारी बाकी दुसऱ्याला 3 ने भागून उरणाऱ्या बाकी एवढीच असते.

आता स्वप्नात विद्वान लोकांनी केलेली निवेदनं आठवून, आठवून मी लिहिली आहेत तेव्हा थोडंफार... घ्याल ना समजून ! प्रतिक्रियेची आशा नाही पण अपेक्षा आहे.

0) $0 = 3 \times 0 + 0$ .... (1)

$0 \times 10^0 = 0 \times 1 = 0 = 3 \times 0 + 0$

$0 \times 10^1 = 0 \times 10 = 0 = 3 \times 0 + 0$

$0 \times 10^2 = 0 \times 100 = 0 = 3 \times 0 + 0$

$0 \times 10^n = 0 = 3 \times 0 + 0$ .... (2)

1) $1 = 3 \times 0 + 1$ .... (1)

$1 \times 10^0 = 1 \times 1 = 1 = 3 \times 0 + 1$ .... (1)

$1 \times 10^1 = 1 \times 10 = 10 = 3 \times 3 + 1$

$1 \times 10^2 = 1 \times 100 = 100 = 3 \times 33 + 1$

$1 \times 10^3 = 1 \times 1000 = 1000 = 3 \times 333 + 1$

$1 \times 10^n = 10^n = 3 \times 333$ .....(n वेळा 3) + 1 .... (2)

2) $2 = 3 \times 0 + 2$ .... (2)

$2 \times 10^0 = 2 \times 1 = 2 = 3 \times 0 + 2$

$2 \times 10^1 = 2 \times 10 = 20 = 3 \times 6 + 2$

$2 \times 10^2 = 2 \times 100 = 200 = 3 \times 66 + 2$

$2 \times 10^3 = 2 \times 1000 = 2000 = 3 \times 666 + 2$

2×10^n = 2000 .... (n शून्ये) = 3 x 666 .... (n वेळा 6) + 2 .... (2)

3) 3 = 3 x 1 + 0 .... (1)

$3 \times 10^0 = 3 \times 1 = 3 = 3 \times 1 + 0$

$3 \times 10^1 = 3 \times 10 = 30 = 3 \times 10 + 0$

$3 \times 10^2 = 3 \times 100 = 300 = 3 \times 100 + 0$

3×10^n = 3 x 1000 .... (n शून्ये) = 3 x 1000 ....(n शून्ये) + 0 .... (2)

4) 4 = 3 x 1 + 1 .... (1)

$4 \times 10^0 = 4 \times 1 = 4 = 3 \times 1 + 1$

$4 \times 10^1 = 4 \times 10 = 40 = 3 \times 13 + 1$

$4 \times 10^3 = 4 \times 1000 = 4000 = 3 \times 1333 + 1$

4×10^n = 4 x 1000 ... (n शून्ये) = 4000 .... (n शून्ये) = 3 x 1333 ....(n वेळा 3) + 1 .... (2)

5) 5 = 3 x 1 + 2 .... (1)

$5 \times 10^0 = 5 \times 1 = 5 = 3 \times 1 + 2$

$5 \times 10^1 = 5 \times 10 = 50 = 3 \times 16 + 2$

$5 \times 10^2 = 5 \times 100 = 500 = 3 \times 166 + 2$

$5 \times 10^3 = 5 \times 1000 = 5000 = 3 \times 1666 + 2$

5×10^n = 5 x 1000 .... (n शून्ये) = 5000 ... (n शून्ये) = 3 x 1666 .... (n वेळा 6) + 2 .... (2)

6) 6 = 3 x 2 + 0 .... (1)

$6 \times 10^0 = 6 \times 1 = 6 = 3 \times 2 + 0$

$6 \times 10^1 = 6 \times 10 = 60 = 3 \times 20 + 0$

$6 \times 10^2 = 6 \times 100 = 600 = 3 \times 200 + 0$

6×10^n = 6 x 100 .... (n शून्ये) = 600 ..... (n शून्ये) = 3 x 200 ... (n शून्ये) + 0 .... (2)

7) 7 = 3 x 2 + 1 .... (1)

$7 \times 10^0 = 7 \times 1 = 7 = 3 \times 2 + 1$

$7 \times 10^1 = 7 \times 10 = 70 = 3 \times 23 + 1$

$7 \times 10^2 = 7 \times 100 = 700 = 3 \times 233 + 1$

7×10^n = 7 x 100 ... (n शून्ये) = 700 ... (n शून्ये) = 3 x 233 ... (n वेळा 3) + 1 .... (2)

8) 8 = 3 x 2 + 2 .... (1)

$8 \times 10^0 = 8 \times 1 = 8 = 3 \times 2 + 2$

$8 \times 10^1 = 8 \times 10 = 80 = 3 \times 26 + 2$

$8 \times 10^2 = 8 \times 100 = 800 = 3 \times 266 + 2$

$8 \times 10^3 = 8 \times 1000 = 8000 = 3 \times 2666 + 2$

8×10^n = 8 x 100 ... (n शून्ये) = 800... (n शून्ये) = 3 x 266 .... (n वेळा 6) + 2 .... (2)

9) 9 = 3 x 3 + 0 .... (1)

$9 \times 10^0 = 9 \times 1 = 9 = 3 \times 3 + 0$

$9 \times 10^1 = 9 \times 10 = 90 = 3 \times 30 + 0$

$9 \times 10^2 = 9 \times 100 = 900 = 3 \times 300 + 0$

9×10^n = 9 x 100 ... (n शून्ये) = 9000... (n शून्ये) = 3 x 3000... (n शून्ये) + 0 .... (2)

10) वरील (1) ते (9) मुद्यांमधील प्रत्येक (1) व (2) च्या गणिती निरीक्षणावरून पुढील अनुमान निघते :- a हा कोणताही अंक असेल तर a ला 3 ने भागून उरणारी बाकी व a हा अंक एखाद्या संख्येत कोणत्याही स्थानी असतानाच्या त्याच्या स्थानिक किंमतीला 3 ने भागून उरणारी बाकी, या दोन्ही बाक्या समान असतात.

11) आता वरील मुद्दा (10) वरून असे म्हणता येईल की या दोन बाक्यांपैकी कोणतीही एक शून्य असेल तर दुसरीही शून्य असेल, आणि या पैकी कोणतीही एक बाकी शून्य नसेल तर दुसरीही शून्य नसेल.

12) वरील (11) वरून मिळणारा निष्कर्ष :- a हा कोणताही अंक असेल व $a \times 10^n$ ही त्याची स्थानिकक किंमत असेल तर a आणि $a \times 10^n$ यापैकी कोणाही एकाला 3 ने भाग जात असेल तर दुसऱ्यालाही 3 ने भाग जातो व कोणाही एकाला 3 ने भाग जात नसेल तर दुसऱ्यालाही 3 ने भाग जातो व कोणाही एकाला 3 ने भाग जात नसेल तर दुसऱ्यालाही तीनने भाग जात नाही.

13) एकूण निष्कर्ष : N ही कोणतीही संख्या व M ही त्या संख्येतील अंकांची बेरीज असेल तर M व N यापैकी कोणाही एकाला 3 ने भाग जात असेल तर दुसऱ्यालाही 3 ने भाग जातो व यापैकी कोणाही एकाला 3 ने भाग जात नसेल तर दुसऱ्यालाही 3 ने भाग जात नाही.

14) आता मुद्दा क्र.(0) ते 12 सहज समजत जाऊन (12) ते (13) ही उडी जरा अवघड वाटत असेल तर तुमच्या मनात कदाचित पुढील शंका असेल. a_r हा एखाद्या संखेतील अंक व $a_r \times 10^r$ ही त्यांची स्थानिक किंमत असेल, तर a_r व $a_r.10^r$ यापैकी एकाला 3 ने भाग जात असेल किंवा नसेल तर दुसऱ्यालाही अनुक्रमे 3 ने भाग जातो किंवा जात नाही हे पटते पण त्यावरून, जर या संख्येतील अंकांची बेरीज M असेल व,

$N = a_{n-1}.10^{n-1} + a^{n-2} . 10^{n-2} + ... + a_r .10^r + ... + a_1 . 10^1 + a_0 . 10^0$ ही n अंकी संख्या असून, $M = a^{n-1} + a_{n-2} + ... + a_r + ... a_1 + a_0$ असेल तर N व M साठी वरील प्रकारचा निष्कर्ष काढताना थोडीशी वैचारिक पडझड होते. असतील कां ? कशा ? इत्यादी त्याचे स्पष्टीकरण पुढीलप्रमाणे.

15) भाज्य = भाजक x भागाकार + बाकी; बाकी < भाजक याचा वापर करू.

समजा, $a_0 = 3 \times q_0 + R_0$ व $a_0 \times 100 = 3 \times q_0{}^1 + R_0$; $q_0 = q_0{}^1$

$+ a1 = 3 \times q_1 + R_1$ व $a_1 \times 10^1 = 3 \times q_1{}^1 + R_1$; $q_1 = q:$

$+ a_2 = 3 \times q_2 + R_2$ व $a_2 \times 10_2 = 3 \times q^1{}_2 + R_2$; $q_2 = q_2{}^1$

+ ....

$+ a_{n-2} = 3 \times q_{n-2} + R_{n-2}$ व

$+ a_{n-2} = 3 \times q_{n-2} + R_{n-2}$ व $a_{n-2} \times 10_{n-2} = 3 \times q^1{}_{n-2} + R_{n-2}$; $q_{n-2} = q^1{}_{n-2}$

$+ \quad a_{n-1} = 3 \times q_{n-1} + R_{n-1}$ व $q_{n-1} \times 10^{n-1} = 3rq^1{}_{n-1} + R_{n-1}$; $q_{n-1} = q^1{}_{n-1}$

बेरेजेने

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} a_r = 3 \sum_{r=0}^{r=n-1} q_r + \sum_{r=0}^{r=n-1} R_r \text{ व } \sum_{r=0}^{r=n-1} ar \times 10^r = 3 \sum_{r=o}^{r=n-1} q^1 r + \sum_{r=o}^{r=n-1} R_r$$

$M = \sum_{r=o}^{r=n-1} a_r$ व $N = \sum_{r=o}^{r=n-1} a_r \times 10_r$ त्यामुळे M व N यांना 3 ने भागून उरणारी बाकी म्हणजेच

$\sum_{r=o}^{r=n-1}$ Rr ला 3 ने भागून उरणारी बाकी.

उदाहरणार्थ : समजा N = 12345 व त्यामुळे M = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15

आता N = 10000 + 2000 + 300 + 40 + 5

= (3 x 3333 + 1) + (3 x 666 + 2) + (3 x 100 + 0) + (3 x 13 + 1) + (3 x 1 + 2)

= 3 (3333 + 666 + 100 + 13 + 1) + (1 + 2 + 0 + 1 + 2)

= 3 (4113) + (6)

= 3 x 4115 + 0

बाक्या समान = 0 ∴ M व N यांना 3 ने भाग जातो.

M = 15 = 3 x 5 + 0

आता समजूत पटली असेल !

16) समजा, D हा कोणताही एक अंक आहे म्हणजेच $D \in (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ व $D \times 10^n$ ही तो एखाद्या संख्येत असतानाची त्याची स्थानिक किंमत आहे म्हणजेच $n \in W$ तर D व $D \times 10^n$ यांना 3 ने भागले असता बाकी समान उरते हे Binomeal सिद्धांताने सिद्ध करता येईल. असे -

समजा, भाज्य = भाजक x भागाकार + बाकी भाजक सूत्रानुसार

$D = 3Q + R ; \quad Q \in W, R \in (0, 1, 2)$ .... (1)

$\therefore$ $n \in w$ असेल तर $D \times 10^n = 10^n (3Q + R) = 3 \times Q \times 10^n + R \times 10^n$

$\therefore D \times 10^n = 3 \times Q \times 10^n + R (1 + 9)^n$

$= 3 \times Q \times 10^n + R (1 + {}^nc_1 \times 9 + {}^nC_2 \times 9^2 + ... + 9^n)$

$= 3 \times Q \times 10^n + R + R ({}^nc_1 \times 9 + {}^nC_2 \times 9^2 + ... + 9^n)$

$= 3 \times Q' \times 10^n + R + 9 R ({}^nc_1 + {}^nc_2 \times 9 + ... + 9^{n-1})$ .... (2)

(1) व (2) वरून D व $D \times 10^n$ यांना 3 ने भागले असता बाकी समान उरते हे सिद्ध.

17) आणखी एक प्रकार पहा.

$10^0 = 1 = 3 \times 0 + 1$

$10^1 = 10 = 3 \times 3 + 1$

$10^2 = 100 = 3 \times 33 + 1$

$10^3 = 1000 = 3 \times 333 + 1$

....

10^n = 1000 .... (n शून्ये) = 3 x 333 ... (n वेळा 3) + 1

$\therefore$ $D = 3Q + R$ असेल तर $D \times 10^n = (3Q + R) \times 10^n$

$= 3Q \times 10^n + R \times 10^n$

$= 3Q \times 10^n$ + R (3 x 333 ..... (n वेळा 3) + 1)

$= 3Q \times 10^n$ + R x 3 x 333 ....(n वेळा 3) + R

$= 3 \times Q' + R \because Q' = (Q \times 10^n + R \times 33$ ... (n वेळा 3)

$\therefore$ D व $D \times 10^n$ यांना 3 ने भागले असता उरणारी बाकी समान असते हे सिद्ध.

18) समशेषीसंख्या किंवा Concept of congruence in integers संदर्भाने -

$N = a_0 + a_1 . 10 + a_2 . 10^2 + ... + a_{K-1} . 10^{K-1} ; o \le ai < 10$

$M = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}$

$\because 10 \equiv 1 \pmod 3$

$a_o + a_1 . 10 + a_2 . 10^2 + ... + a_{k-1} . 10^{k-1} = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}$ (mod 3)

i.e. N ≡ M (mod.3) ∴ If 3 | N or m then 3 | M or N respectively & If 3 | N or M than 3 | M or N respectively.

19) 1) समजा N ही धनपूर्णांक संख्या असून तिच्या अंकांची बेरीज M आहे. आता (1) M ला 3 ने भाग जात असेल तर N लाही 3 ने भाग जातो. 2) M ला 3 ने भाग जात नसेल तर N लाही 3 ने भाग जात नाही. 3) N ला 3 ने भाग जात असेल तर M लाही 3 ने भाग जातो व 4) N ला 3 ने भाग जात नसेल तर M लाही 3 ने भाग जात नाही. या चारही विधानांची सिद्धता एकाच वेळी द्यायची असेल तर थोडसं अवघड असेल पण अशक्य नाही.

2) प्रत्यक्ष उदाहरणे घेऊन पहा. वरील चारही विधाने निरपवाद सत्य आहेत असे आढळते. पण ! पण ही झाली प्रात्यक्षिक सिद्धता. सर्वमान्य सिद्धता ही तार्किक असावी लागते. ती जमते कां ते पाहुया !

3) समजा N मधील अंकांची संख्या n आहे. मग N मधील सर्वात डावीकडचा अंक अशून्य असून त्याची स्थानिक किंमत, तो अंक गुणिले 10^{n-1} असेल. तसेच पुढच्या अंकाची स्थानिक किंमत तो अंक गुणिले 10^{n-2} असेल (हा डावीकडून दुसरा अंक व त्यापुढील कोणताही अंक शून्य असू शकेल) त्यापुढच्या अंकाची स्थानिक किंमत तो अंक गुणिले 10^{n-2} असेल असे करता करता सर्वात शेवटचा, म्हणजे एकंस्थानचा अंक ! त्याची स्थानिक किंमत तो अंक गुणिले 10^0 म्हणजेच तो अंक गुणिले 1 म्हणजेच तो अंक एवढीच असेल.

4) आता, डावीकडून उजवीकडे त्या संख्येतील अंक $a_1, a_2, a_3, ...$ असतील तर एकंस्थानचा अंक a_n असेल आणि त्यामुळे ती संख्या विस्तारित स्वरूपात पुढीलप्रमाणे असेल.

$N = a_1 . 10^{n-1} + a_2 . 10^{n-2} + a_3 . 10^{n-3} + ... + a_x . 10^{n-x} + ...+ a_{n-1} . 10^1 + a_n . 10^0$ आणि

$M = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_x + ...+ a_{n-1} + a_n$ अर्थात $a_1 \neq 0 ; 0 \leq a_x \leq 9$

5) आता, समजा a_x हा कोणताही अंक असून त्यास 3 ने भागले असता भागाकार b व बाकी r आहे. अर्थात $r \in \{ o, 1, 2 \}$ ∴ $ax = 3b + r$

6) आता, $10^0 = 3 \times 0 + 1$; $10^1 = 3 \times 3 + 1$; $10^2 = 3 \times 33 + 1$; $10^3 = 3 \times 333 + 1$; $10^4 = 3 \times 3333 + 1$; असे करता करता $10^{n-1} = 3 \times 333 ....$ (n वेळा 3) + 1

7) आता वरील 5) व 6) वरून $a_x \times 10^{n-x} = (3b + r) \times 10^{n-x}$

$= 3b \times 10^{n-x} + r \times 10^{n-x}$

$= 3b \times 10^{n-x} + (3 \times 333 ....$ (n - x) वेळा + 1)

$= 3b \times 10^{n-x} + 3r \times 333 ....$ (n - x) वेळा + r

$= 3 (b \times 10^{n-x} + r \times 333 ...$ (n - x) वेळा + r

$= 3.C + r ....$ c हा पूर्णांक

8) म्हणजेच a_x हा कोणताही अंक व ax x 10 चा पूर्ण घात यांना प्रत्येकी 3 ने भागले असता बाकी r म्हणजेच 'समान' उरते.

9) यावरून असे म्हणता येईल की, N व M यांना 3 ने भागल्यास उरणारी बाकी समान असते.

10) आता ही समान बाकी शून्य किंवा अशून्य असणेवरून M व N ला 3 ने भाग जाणे किंवा न जाणे ठरेल.

11) यावरून M व N पैकी कोणाही एकाला 3 ने भाग जात असेल किंवा नसेल तर दुसऱ्यालाही 3 ने भाग जातो किंवा जात नाही, अनुक्रमे.'' हे सिद्ध होते.

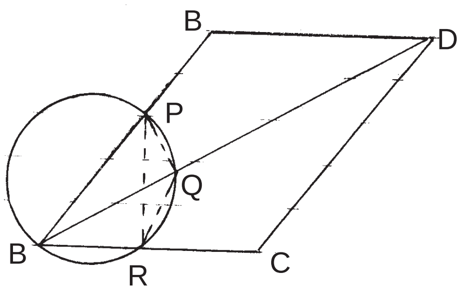
20) **'सोडवून तर पहा'** साठी मी एक प्रश्न दिला होता. त्यातील चूक दुरूस्त करून उत्तरही पुढे दिले आहे.

दुरूस्त प्रश्न : B मधून जाणारे एक वर्तुळ समांतरभुज चौकोन ABCD च्या बाजू AB, BC व कर्ण BD यांना अनुक्रमे P, R व Q बिंदूत छेदते, तर सिद्ध करा BP x BA + BR x BC = BQ x BD

पक्ष : चौ. ABCD समांतरभुज चौ. असून B मधून जाणारे एक वर्तुळ AB, BC व BD यांना अनु. P, R व Q मधे छेदते. A-P-B, B-Q-D, B-R-C

साध्य : BP x BA + BR x BC = BCP x BD

रचना : PQ, QR व PR जोडा.



सिद्धता : 1) $\angle PBQ = \angle ABD$ ∵ एकाच कोनाची दोन नावे.

2) $\angle PBQ = \angle QRP$ ∵ एकाच कंसात आंतरलिखित कोन

∴3) $\angle ABD = \angle QRP$ ∵ विधान 1) व 2) वरून

4) $\angle ADB = \angle DBC$ ∵ व्युत्क्रम कोन कसोटीचा व्यत्यास

5) $\angle DBC = \angle QBR$ ∵ एकाच कोनाची दोन नावे.

6) $\angle QBR = \angle QPR$ ∵ एकाच कंसात आंतरलिखित कोन

∴7) $\angle ADB = \angle QPR$ ∵ विधान 4), 5) व 6)

8) $\Delta ABD \sim \Delta QRP$ ∵ विधान 3), 7) कोको कसोटी

∴9) $\frac{AB}{QR} = \frac{BD}{RP} = \frac{AD}{QP} = x$ समजा ∴ स.त्रि.सं.बा. विधान 8

10) ∴ QR = AB / x व RP = BD/x व QP = AD/x ∴ बि.9 वरून

11) QP = AD/x = BC/x AD = BC समांतर भु.चौ.च्यासं.बा.

12) PQ.BR + PB x QR = BQ.PR ∴ चौ. PQRB मध्ये टॉलेमीचे प्रमेय.

13) $\frac{BC}{x}. BR + PB. \frac{AB}{x} = BQ. \frac{BD}{x}$ ∴ वि. 10), 11), 12) वरून

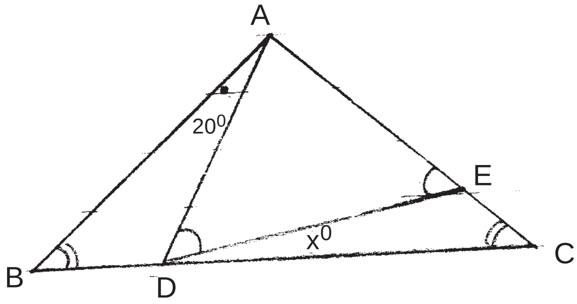
14) BC.BR + PB.AB = BQ.BD ∴ वि 13) X x

15) BP.BA + BR.BC = BQ.BD ∴ वि. 14

गणित छंद आनंद : अंक 23, 24, पान 30 सोडवून तर पहा.

प्रश्न B : पक्ष Δ ABC मध्ये AB = AC, B-D-C, $\angle$ BAD = 20^0, AD = AE, A-E-C

साध्य : $\angle$ CDE चे माप काढणे.



सिद्धता : 1) समजा CDE = x^0

2) $\angle B = \angle C \therefore$ AB = AC (पक्ष)

3) $\angle ADE = \angle AED \therefore$ AD = AE (पक्ष)

4) च्या बाह्यकोनाच्या प्रमेयानुसार

$\angle AED = \angle c + x$

$\angle ADC = \angle B + 20^0$

(5) विधान (2) (3) (4) वरून $2x = 20^0$ (6) $x = 10^0$

गणित छंद आनंद : अंक 23, 24, पान 33 प्रश्न C

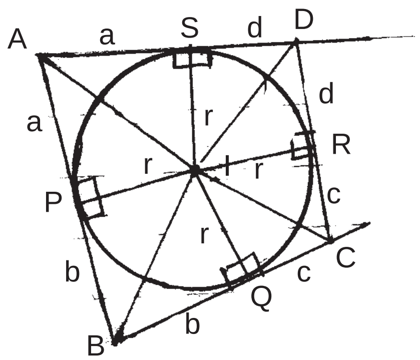
प्रसिद्ध सूत्र : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

यावरून जर $a + b + c = 0$ तर $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3 \times 4 = 12$

$\therefore$ (abc = 4 पक्ष)

प्रश्न E)



पक्ष : चौ. ABCD च्या बाजू AB, BC, CD व DA या I केंद्र असलेल्या वर्तुळास अनुक्रमे P, Q, R व S बिंदूत स्पर्श करतात. वर्तुळाची त्रिज्या = r = 9 सेंमी. चौ. ABCD ची परिमिती = 56 सेंमी.

साध्य : A (चौ ABCD) = ? ते ठरविणे.

सिद्धता : 1) स्पर्शखंडांच्या एकरूपतेचे प्रमेयावरून

AP = AS (= a समजा), BP = BQ (= b समजा)

CQ = CR (= C समजा); DR = DS (= d समजा)

2) स्पर्शत्रिज्येच्या लंबतेनुसार IP, IQ, IR, IS अनु AB, BC, CD, DA यांना लंब आहेत.

3) A (चौ ABCD) = A (चौ. APIS) + A (चौ.BQIP) + A (चौ CRIQ) + A (चौ DSIR)

4) 3 मधील उजव्या बाजूचे चारही चौकोन पतंग प्रकारचे आहेत.

A (चौ ABCD) = 2 (A (Δ IAS + A (Δ IDS) + A(Δ IBQ) + A (Δ ICQ)]

689/4 प्लॉट नं.15 पद्य सहकारी सोसायटी पुणे 37

$$= 2\left(\frac{ar}{2} + \frac{dr}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}\right) = r(a+b+c+d)$$

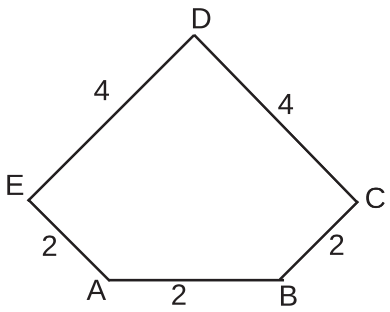
$= 9 \times 56/2 = 9 \times 28 = 252$ **चौसेमी.**

✲ ✲ ✲ ✲

सोडवून तर पहा (जानेवारी 2010)

1. Δ ABC मध्ये $\angle ABC = 120^0$, AC = 6, BC = 2 $\angle ACB$ चा दुभाजक AB ला D मध्ये छेदतो. (A - D - B). CD ची किंमत शोधा.

2. शेजारच्या आकृतीत $\angle A = \angle B = 120^0$,
   EA = AB = BC = 2
   CD = DE = 4
   तर ABCDE या पंचकोनाचे क्षेत्रफळ ?



3. इथे खालच्या आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे 1 ते 2000 पर्यंतच्या संख्यांनी Δ तयार केला आहे.
   पहिली ओळ वगळता, वरील दोन संख्यांची बेरीज खालच्या ओळीवर घेऊन Δ बनविला आहे.
   त्रिकोणाचा शेवट कोणती संख्या असेल ?
   उत्तर लिहिताना पूर्ण मूळसंख्यांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहा.

   1 2 3 4 5 ....
   3 5 7 9 ....
   8 12 16 ....
   20 28 ....
   48 ....

4. जर α , व β हे $ax^2 + 2bx + c = 0$ च्या उकली असतील तर

   i) $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ या उकली असणारे समीकरण लिहा.

   ii) $\alpha + \frac{1}{\beta}$ आणि $\beta + \frac{1}{\alpha}$ उकली असणारे समीकरण लिहा.

   iii) α^2, β^2 उकली असणारे समीकरण लिहा.

5. $(1 + x)^n$ च्या विस्तारातील 3 क्रमागत पदांचे सहगुणक 20, 35, 42 असतील तर n = ?

6. $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाच्या उकली समान असण्यासाठीची अट तयार करा.

(जानेवारी 2010)
(अंक 25, पृष्ठ 19 ते 20)

सोडवून तर पहा (ऑगस्ट व आक्टो. 2009) ची उत्तरे

श्री.वाय.डी.देशपांडे*

A) समजा दोन अंकी संख्या एकक स्थानचा अंक b व दशक स्थानचा अंक a

$\therefore$ संख्या = 10a + b

संख्येला 3 ने भाग जातो.

$\therefore$ 10a + b = 3c (c धनपूर्णांक)

$\therefore$ 9a + a + b = 3c

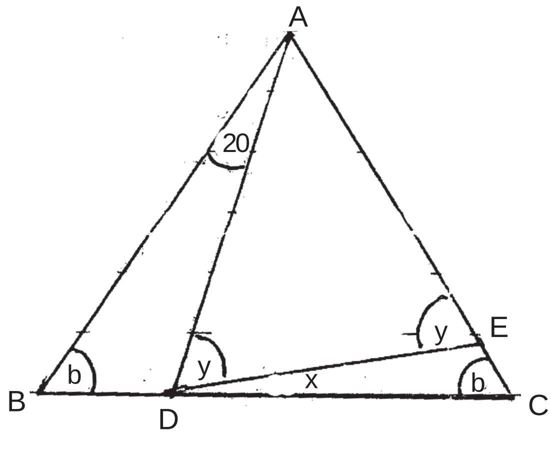
$\therefore$ a + b = 3c - 9a

$\therefore$ a + b = 3 (c - 3a)

परंतु, (c - 3a) धनपूर्णांक होय कारण c > 3a

$\therefore$ (c - 3a) ला 3 ने भाग जातो.

$\therefore$ (a + b) ला 3 ने भाग जातो.



B) 1. Δ ABC मध्ये AB = AC

$\therefore$ समजा $\angle B = \angle C = b^0$

2. Δ ADE मध्ये AD = AE

$\therefore$ समजा $\angle ADE = \angle AED = y^0$

3. समजा $\angle EDC = x^0$

4. Δ ADB मध्ये

x + y = b + 20 [Δ चा बाह्यकोन गुणधर्म] (1)

5. Δ EDC मध्ये y = b + x.........[Δ चा बाह्यकोन] (2)

6. x + b + x = b + 20 $\rightarrow$ [समी 1 मध्ये y = b + x ठेवून]

$2x = 20^0$

$\therefore x = 10^0$

$\therefore m\angle EDC = 10^0$

C) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

परंतु, $a + b + c = 0$

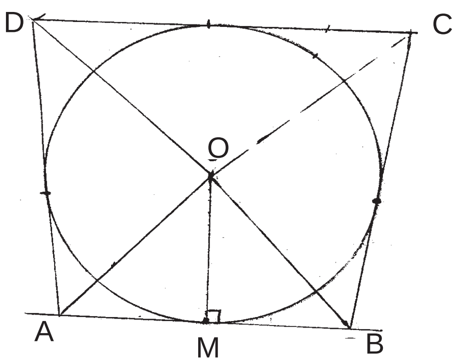
$\therefore \; a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$\therefore \; a^3 + b^3 + c^3 = 3\,abc$

$= 3 \times 4 \quad \rightarrow$ (abc = 4 **ठेवून**

= 12 **उत्तर**

E)



1. O **केंद्री वर्तुळ**

रेख AB **वर्तुळाची** M **बिंदुतील स्पर्शिका**

$\therefore$ OM $\perp$ AB

$\therefore$ A (Δ OAB) $= \frac{1}{2} \times$ OM x AB (OM **त्रिज्या**

$= \frac{1}{2} \times$ r x AB (r = (**त्रिज्या मानू**)

2. ABCD **च्या चारही बाजू** O **केंद्री वर्तुळाच्या स्पर्शिका होत**

$\therefore$ A (ABCD) $= \frac{1}{2} \times$ r x ABCD **ची परिमिती**

$= \frac{1}{2} \times 4.5 \times 56$

$= 126$ (**सें.मी.**)^2 **उत्तर**

✲ ✲ ✲ ✲

> Geometry, which is the only science that it hath pleased God hitherto bestow on mankind.
>
> **- Thomas Hobbs**
>
> ❖
>
> Equations are just the boring part of mathematics. I attempt to see things in terms of Geometry.
>
> **- Stephen Hawkings**

टिकेकरीय 20

(जानेवारी 2010)
(अंक **25**, पृष्ठ 20 ते 27)

सरासरीच्या विविध प्रकारांची आवश्यकता

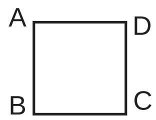
डॉ.व.ग. टिकेकर*
(निवृत्त प्राध्यापक व गणित विभाग प्रमुख, इंडियन इन्स्टिट्युट ऑफ सायन्स, बंगलोर - 560012)

1. **विषय-प्रवेश :** एखाद्या विद्यार्थ्याला 100 पैकी मराठीत 87, इंग्रजीत 75, गणितात 92 आणि शास्त्र विषयात 82 गुण मिळाले तर त्याचे या चार विषयांच्या संदर्भातील सरासरी गुण

$$\frac{87 + 75 + 92 + 82}{4} = \frac{336}{4} = 84 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

असल्याचे आपण म्हणतो. सरासरी काढण्याची ही पद्धत सर्वांना इतकी परिचित आहे की त्यात काही नवीन शिकण्या-शिकवण्यासारखे आहे असे वाटत नाही. हीच पद्धत आपण इतर सर्व ठिकाणी अगदी बेदिक्कतपणे वापरीत असतो. उदाहरणार्थ, एका वर्गातील 40 विद्यार्थ्यांपैकी प्रत्येकाची उंची मोजली तर त्या सर्व मोजमापांची बेरीज करून त्या बेरजेला 40 ने भागले की त्या वर्गातील विद्यार्थ्यांची सरासरी उंची मिळणार हे अगदी स्पष्ट असल्याचे आपण मानतो. पण सर्वच ठिकाणी सरासरी काढण्याची हीच रीत योग्य आहे का ? उदाहरणार्थ, एखाद्या समुहातील माणसांचे सरासरी उत्पन्न काय आहे, किंवा एखादे वाहन रस्त्यावरून जाताना रस्त्याच्या निरनिराळ्या भागात निरनिराळ्या वेगाने जात असेल तर त्या वाहनाचा सरासरी वेग काय असेल हे प्रश्न महत्त्वाचे आहेत यात कोणालाही कसलीही शंका असण्याचे कारण नाही. या व अशा प्रकारच्या इतर प्रश्नांसाठी सरासरी काढण्याची कोणती पद्धत वापरावी तेच तपासून पाहण्याचा या लेखाचा उद्देश आहे.

2. **उदाहरण 1 :** आकृती 1 मध्ये दाखविलेला 100 से.मी. बाजू असलेला ABCD हा चौरस पहा. एक लहानशी मुंगी A पासून आपला प्रवास सुरू करते आणि प्रथम AB, नंतर BC, मग CA व शेवटी DA या बाजूंवरून जाऊन A पाशी परत येते. तीचा वेग AB वर एका मिनीटाला 400 से.मी., BC वर प्रतिमिनीट 300 सें.मी, CD वर दर मिनिटाला 200 सें.मी., आणि DA वर प्रत्येक मिनीटाला 100 सें.मी. आहे. तर A पासून सुरू होऊन ABCD चौरसाच्या प्रत्येक बाजूवरून एकेकदा जाऊन परत A पाशी येण्याच्या प्रवासातील त्या मुंगीचा सरासरी वेग किती ? (या प्रवासात जसजसे चालून झालेले अंतर वाढत जाईल, तसतसे दमण्यामुळे मुंगीचा वेग कमी होत असल्याचे दिसत आहे.)



आकृती 1

आपली नेहमीची (1) सारखी रीत वापरून

$$\frac{400 + 300 + 200 + 100}{4} = \frac{1000}{4} = 250 \text{ सें.मी./मिनीट} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

असा मुंगीचा सरासरी वेग असल्याचे बरेचजण सांगतात. पण आता वेगाची मुलभूत व्याख्या वापरून हा सरासरी वेग काढला तर काय उत्तर मिळते ते पाहूया. वेगाची मुलभूत व्याख्या आहे :

$$\text{वेग} = \frac{\text{काटलेले अंतर}}{\text{ते अंतर काटण्यास लागणारा वेळ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

या उदाहरणातील मुंगीने काटलेले एकूण अंतर = AB + BC + CD + DA
= 400 सें.मी.

*द्वारा : डॉ.ठकार, नवा महाद्वार रस्ता, पद्माराजे शाळेजवळ, कोल्हापूर - 416012.

आता AB हे 100 सें.मी. चे अंतर 400 सें.मी./मिनीट या वेगाने काटण्यास $\frac{100}{400} = \frac{1}{4}$ मिनीट लागेल.

त्याचप्रमाणे BC, CD, व DA वरील प्रवासाला अनुक्रमे $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, व 1 मिनीट लागेल.

$\therefore$ चौरसावरील प्रवासास मुंगीला लागलेला एकूण वेळ $= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{25}{12}$ मिनीटे

$\therefore$ मुंगीचा सरासरी वेग $= \frac{400}{25/12} = 192$ सें.मी./मिनीट ....(4)

(4) मधील उत्तर मूलभूत व्याख्येनुसार काढले आहे व म्हणून ते योग्य व बरोबर आहे. पण मग (2) व (4) मधील उत्तरात तफावत कशामुळे ? साहजिकच सरासरी गुण, सरासरी उंची यासाठी वापरलेली (1) मधील रीत (पद्धत) या उदाहरणातील परिस्थितीस लागू पडत नसावी. मग या व या प्रकारच्या उदाहरणांसाठी सरासरी काढण्याची कोणती पद्धत लागू होत असेल ? ते आपण काही वेळानंतर पाहूच. मुंगीच्या 400, 300, 200 व 100 या वेगांच्या एकूण 4 किंमतींची सरासरी आपल्याला हवी आहे. या संबंधात जाता जाता त्या चार संख्यांवर आधारीत पुढील आकडेमोड लक्षात ठेवूया :

$$\frac{4}{\frac{1}{400} + \frac{1}{300} + \frac{1}{200} + \frac{1}{100}} = 192 \quad \text{.....................................(5)}$$

ज्यांची सरासरी हवी आहे त्या संख्या आणि त्यांची एकूण संख्या 4 एवढेच वापरून (5) मध्ये मिळालेले उत्तर (4) मधील उत्तराशी तंतोतंत जुळते एवढे चटकन डोळ्यात व मनात भरते हे मात्र खरे !

3. **उदाहरण 2 :** एका डोंगराच्या पायथ्यापासून डोंगरमाथ्यावर मोटारने जाण्यासाठी 4 कि.मी. अंतरासाठी 1 लिटर पेट्रोल लागते. त्याच मोटारने व त्याच रस्त्याने तेवढेच अंतर उतरून येण्याचा परतीचा प्रवास (डोंगरमाथा ते डोंगर-पायथा) 6 कि.मी. साठी 1 लिटर पेट्रोल वापरून पुरा करता येतो. तर डोंगर-पायथा ते डोंगरमाथा आणि परत डोंगरमाथा ते डोंगरपायथा हा संपूर्ण प्रवास सरासरी किती कि.मी. प्रति लिटर दराने पुरा करता येईल ? (परतताना उतार असल्याने कमी पेट्रोलमध्ये येतानाचा प्रवास होऊ शकतो हे आपण समजू शकतो.)

जाताना 4 कि.मी./लिटर आणि येताना प्रति लिटर 6 कि.मी. या दोन दर दाखविणाऱ्या संख्याची सरासरी हवी आहे. (1) मधील प्रकारच्या सूत्राने

$\frac{4 + 6}{2} = 5$ कि.मी./लिटर ....(6)

हे उत्तर मिळेल. हे उत्तर योग्य का अयोग्य हे जाणून घेण्यासाठी पुन्हा एकदा मूलभूतपणे विचार करूया. त्यानुसार

$$\frac{\text{मोटारने काटलेले अंतर (कि.मी. मध्ये)}}{\text{ते अंतर काटण्यास खर्ची पडलेले पेट्रोल (लिटरमध्ये)}} \quad \text{...(7)}$$

हे सूत्र वापरावे लागेल.

चढतीच्या व उतरतीच्या प्रवासांचे अंतर सारखे असल्याचे उदाहरणाच्या विधानात सांगितले आहे. एकवेळचे अंतर (म्हणजे डोंगर-पायथा ते डोंगरमाथा, अथवा डोंगरमाथा ते डोंगरपायथा) x कि.मी. असल्याचे मानूया (जरूर नसल्याने ही माहिती प्रश्नाच्या विधानात दिलेली नाही). जाताना प्रतिलिटर 4 कि.मी. जात असल्याने, जातानाच्या x कि.मी. साठी $\frac{x}{4}$ लिटर पेट्रोल लागणार. त्याचप्रमाणे उतरताना $\frac{x}{6}$ लिटर पेट्रोल लागेल. म्हणून (7) वापरून

$$\text{सरासरी दर} = \frac{2x}{\left(\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{x}{6}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{2}{\frac{5}{12}} = \frac{24}{5} = 4.8 \text{ कि.मी/लिटर} \quad \text{...........(8)}$$

(6) व (8) या दोन उत्तरातील भिन्नतेचा नीट जागरूकपणे विचार करा. (2) व (4) या उदाहरण 1 मधील उत्तरात तफावत आढळली तसेच उदाहरण 2 मध्येही झाले आहे. (5) प्रमाणेच उदाहरण 2 मध्येही आढळलेल्या

$$\frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = 4.8 \quad \text{...(9)}$$

या 4 व 6 या उदाहरण 2 मधील उपलब्ध माहितीवर आधारित आकडेमोडीकडे बारकाईने ध्यान द्या.

4. **उदाहरण 3** : (उदाहरण 2 मध्ये महत्त्वाचा बदल करून हे उदाहरण तयार केले आहे) : x कि.मी. हे अंतर एकदा (डोंगर-पायथा ते डोंगरमाथा) प्रत्येक कि.मी.साठी 6 लिटर पेट्रोल वापरून व दुसऱ्या वेळी तेच अंतर (डोंगरमाथा ते डोंगर-पायथा) दर कि.मी.साठी 4 लिटर पेट्रोलचा उपयोग करून काटले तर दोन्ही वेळचा प्रवास मिळून प्रत्येक कि.मी.साठी सरासरी पेट्रोल किती लागेल ?

उत्तर : चढतीच्या वेळी x कि.मी.साठी वापरलेले पेट्रोल = 6x लिटर
परतीच्या वेळी x कि.मी.साठी लागलेले पेट्रोल = 4x लिटर
एकूण प्रवास = 2x कि.मी.

$$\therefore \text{ प्रति कि.मी.साठी सरासरी पेट्रोलचा खप} = \frac{\text{वापरलेले एकूण पेट्रोल}}{\text{काटलेले एकूण अंतर}}$$

$$= \frac{(6x + 4x) \text{ लिटर}}{2x \text{ कि.मी.}} = 5 \text{ लिटर प्रति कि.मी.} \quad \text{................(10)}$$

या उदाहरणात (10) मध्ये मिळालेले उत्तर (1) मध्ये वापरले आहे ह्या प्रकारच्या सरासरीचे सूत्र वापरून मिळते. उदाहरण 2 व 3 मध्ये मिळालेली उत्तरे (अनुक्रमे (8) व (10) निरनिराळ्या सूत्रांनी का मिळतात याचा विचार करून ठेवा. त्याचा उहापोह लवकरच करू

5. **एक नवीन प्रकारची सरासरी :** 400, 300, 200 व 100 या चार संख्यांच्या (2) व (5) या दोन प्रकारच्या आकडेमोडी आपल्या समोर आहेत. तसेच 4 व 5 या दोन संख्यांच्या (6) व (9) या अनुक्रमे (2) व (5) प्रकारच्याच दोन आकडेमोडी आपण पाहिल्या आहेत. (2) व (6) यांच्या आकडेमोडीच्या पद्धतीत साम्य आहे. त्या दोन्ही ज्या सूत्रावर आधारीत आहेत ते सूत्र एकच आहे. (संख्यांची बेरीज भागीले संख्यांची एकूण संख्या हे ते सूत्र आहे.) तसेच (6) व (9) या आकडेमोडींचे सूत्र एकच आहे.

(1), (2) व (6) या आकडेमोडींना आपण 'सरासरी काढणे' असे म्हणत आलो आहोत. पण त्या प्रकारची सरासरी नेहमीच योग्य ठरत नाही हे आपण उदाहरण 1 व 2 यांच्या संदर्भात नोंद केले आहे. या उदाहरणांच्या बाबतीत अनुक्रमे (5) व (9) या आकडेमोडी योग्य उत्तरे देतात हे आपण जाणले आहे. म्हणून (5) व (9) या एक प्रकारच्या सरासरीच आहेत.

(1), (2) व (6) या सरासरींना 'अंकगणितीय सरासरी' किंव 'मध्यमान' म्हणतात. (5) व (9) या सरासरींना harmonic सरासरी म्हणतात.

व्यापकरीत्या $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ या n किंमती असल्यास त्यांचे मध्यमान

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} \quad ....(11)$$

या सूत्राने आणि त्यांची harmonic सरासरी

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_n}} \quad ....(12)$$

या सूत्राने मिळविली जाते.

6. **मध्यमान व harmonic सरासरी यांच्या वापरातील फरक :** उदाहरण 1 मध्ये तेच ठरावीक अंतर (= 100 सें.मी.) हे निरनिराळ्या वेळी (AB, BC, CD, DA वरील मुंगीचा प्रवास) निरनिराळ्या वेगाने काटले गेले आहे. उदाहरण 2 मध्ये तेच ठराविक अंतर (डोंगरमाथा व डोंगरपायथा यांमधील अंतर x कि.मी.) निरनिराळ्या वेळी (चढताना, उतरताना) निरनिराळ्या पेट्रोल-वापराच्या दराने (प्रति लिटर 4 कि.मी., प्रति लिटर 6 कि.मी.) काटले गेले आहे. अशा प्रकारच्या परिस्थितीत सरासरी काढण्यासाठी harmonic सरासरी वापरतात, कारण अशा वेळी तीच सरासरी योग्य असल्याचे आपण मूलभूतप्रकारे ते प्रश्न सोडवून समजून घेतले आहे.

उदाहरण 3 मध्ये सरासरी काढताना छेदात कि.मी. आहेत आणि या एककाच्या संदर्भात या उदाहरणात दोन्ही वेळचा प्रवास (चढतीचा व उतरतीचा) समान कि.मी.चा (= x कि.मी.चा) आहे. या उलट उदाहरणात 2 मध्ये सरासरी काढण्यासाठी छेदात लिटर आहेत आणि चढतीसाठी व उतरतीसाठी वेगवेगळ्या लिटर पेट्रोलचा (अनुक्रमे $\frac{x}{4}$ व $\frac{x}{6}$) वापर केला गेला आहे. म्हणून उदाहरण 3 व 2 मध्ये अनुक्रमे मध्यमान व harmonic सरासरी बरोबर उत्तरे देतात. आता असे समजा की आपण दुसरीकडे कोठेतरी जात असून जाताना व येताना अनुक्रमे प्रतिलिटर 4 व प्रतिलिटर 6 कि.मी.च जाऊ शकत आहोत; आणि जाताना व येताना प्रत्येक वेळी समान मापाचे (समजा 12 लिटर) पेट्रोल वापरले आहे. तर जातानाचा प्रवास प्रतिलिटर 4 कि.मी.प्रमाणे 48 कि.मी. व येतानाचा प्रवास प्रतिलिटर 6 कि.मी. प्रमाणे 72 कि.मी. होईल. (येताना आपण लांबच्या मार्गाने परतलो असण्याची शक्यता आहे.) म्हणजे या जातायेताच्या एकूण प्रवासात काढलेले अंतर = 48 + 72 = 120 कि.मी. व खर्चिलेले पेट्रोल = 24 लिटर. म्हणून सरासरी = 120/24 = 5 किमी प्रति लिटर, जे 4 व 6 चे मध्यमान आहे. असा आहे उदाहरण 2 व 3 मधील महत्त्वाचा फरक.

या विवेचनाचे तात्पर्य हे की सरासरी म्हणून मध्यमान केव्हा वापरायचे आणि harmonic सरासरी केव्हा वापरायची याबद्दल आपण जागरूक असले पाहीजे.

7. आणखीन एका निराळ्या प्रकारची सरासरी (मध्यक) :

उदाहरण 4 : अकरा व्यक्तींचे मासीक उत्पन्न (रूपयांमध्ये) पुढीलप्रमाणे आहे.

100, 150, 750, 2000, 3000, 5000, 11000, 1 लाख, 2 लाख, 3 लाख, 5 लाख

तर त्यांचे सरासरी मासिक उत्पन्न किती ?

या उत्पन्नांच्या रकमांची सरासरी काढण्यासाठी मध्यमान म्हणजेच (1) सारखेच म्हणजेच (11) हे सूत्र वापरल्यास ती सरासरी येईल :

$$\frac{100 + 150 + 750 + 2000 + 3000 + 5000 + 11000 + 1\text{ लाख} + 2\text{ लाख} + 3\text{ लाख} + 5\text{ लाख}}{11} = 1,02,000$$

आता ज्या व्यक्तींचे उत्पन्न 100, 150, 750 अशा प्रकारे कमी आहे त्यांना गरीब म्हणावे लागेल. या गरीबांच्या दृष्टीने या 11 व्यक्तींच्या समुहाचे सरासरी उत्पन्न 1,02,000 आहे असे म्हणणे त्या गरीबांच्यावर अन्याय करण्यासारखे होईल. अशाप्रकारे सरासरी उत्पन्न वगैरे आकडेमोडी केवळ आकडेमोडी करण्यासाठी केल्या जात नाहीत तर या व इतर अशा प्रकारच्या सरासरी, काहीतरी आर्थिक ठोस निर्णय घेण्यासाठी शासन, योजना आयोग इत्यादी संस्था व अभ्यास गटांमध्ये वापरल्या जातात. अशा वेळी निर्णय योग्य असायला हवे असतील, म्हणजे ज्या उत्पन्न गटातील लोकांच्या भल्यासाठी ते निर्णय घेतले जातात, त्या गटातील लोकांना त्या निर्णयांचा खराच फायदा व्हायला हवा असेल तर सरासरी सारखे निर्देशांक योग्य असेच असायला हवेत. त्या संदर्भात देशात बहुधा गरीब व मध्यम उत्पन्न वर्गीय अमाप व श्रीमंत मूठभर अशीच स्थिती असते. त्यामुळे मूठभर श्रीमंतांच्या मोठमोठ्या उत्पन्नांमुळे सर्व देशातील लोकांच्या उत्पन्नाची सरासरी वस्तुस्थितीचा विपर्यास करणारी असता कामा नये. मध्यमान प्रकारची सरासरी तसा विपर्यास करून अन्याय करू शकते. मध्यमान हे वस्तुच्या गुरूत्वमध्यासारखे आहे. वस्तुचा गुरुतवमध्य हा वस्तुतील जड भागाकडे असतो. त्याचप्रमाणे उत्पन्नांच्या सरासरीच्या बाबतीत मध्यमान उत्पन्नाच्या मोठमोठ्या किंमतीकडे ओढले जाते. म्हणून निरनिराळ्या गटातील लोकांच्या विविध उत्पनांबद्दलच्या माहितीवरून सरासरी म्हणून मध्यमान योग्य नसते. त्यासाठी 'मध्यक' नावाची आणखीन एक निराळ्या प्रकारची सरासरी वापरली जाते.

दिलेल्या संख्या त्यांच्या किंमतीच्या चढत्या (वाढत्या) किंवा उतरत्या क्रमाने मांडल्यास त्यातील मधल्या संख्येला (व दिलेल्या संख्यांची संख्या सम असल्यास मधल्या दोन संख्यांच्या मध्यमानाला) त्या सर्व संख्यांचा मध्यक म्हणतात. या व्याख्येनुसार

5, 27, 87, 2, 13, 38, 47

या संख्यांचा मध्यक आहे 27, कारण त्या संख्या वाढत्या क्रमाने मांडल्यास ती मांडणी होईल : 2, 5, 13, 27, 38, 47, 87 व त्यातील मधोमधची संख्या आहे 27. तसेच 104, 28, 57, 23, 4, 18 या संख्या (ज्यांची संख्या 6 म्हणजे सम आहे) उतरत्या क्रमाने मांडल्यास 104, 57, 28, 23, 18, 4 ही मांडणी मिळेल व त्यात मधल्या दोन संख्या 28 व 23 असल्याने त्यांचे मध्यमान

$\frac{28 + 23}{2} = \frac{51}{2} =$ 25.5 होईल व म्हणून दिलेल्या 6 संख्यांचा मध्यक 25.5 होईल.

8. वजनी सरासरी (weighted average) : एका संस्थेत बोर्डाची दहावीची परीक्षा उत्तीर्ण झालेल्या विद्यार्थ्यांना नोकरी मिळू शकते. त्यासाठी इंग्रजी, मराठी, गणित, इतिहास, भूगोल व शास्त्र या 6 विषयात बोर्डाच्या परीक्षेत मिळालेले गुण

विचारात घेतले जातात. यातील प्रत्येक विषयाला बोर्डाच्या परीक्षेत 100 पैकी गुण दिले जातात. पण या संस्थेतील नोकरीसाठी जे ज्ञान लागते त्या दृष्टीने सर्व विषयांचे महत्त्व सारखे नाही. इंग्रजीच्या मानाने मराठीला तिप्पट महत्त्व असून इतिहास व भूगोल या दोन विषयांना समान महत्त्व आहे. इतिहासाच्या तुलनेत इंग्रजीला 2/3 महत्त्व आहे व शास्त्र विषयाला इंग्रजीच्या तुलनेत निम्मे महत्त्व आहे. गणिताला इंग्रजीच्या दुप्पट महत्त्व आहे.

इतिहास व भूगोल यांचे महत्त्व समान असल्याने या दोन विषयांचे महत्त्व प्रत्येकी 1 या अंकाने दाखवूया. त्याला त्या विषयांचा महत्त्व-अंक म्हणूया. दिलेल्या माहितीचा वापर करून कोष्टक 1 च्या दुसऱ्या ओळीत प्रत्येक विषयाचा महत्त्व-अंक दाखविला आहे.

कोष्टक 1

विषय	इंग्रजी	मराठी	गणित	इतिहास	भूगोल	शास्त्र
महत्त्व-अंक	2/3	2	4/3	1	1	1/3

इतिहासाच्या मानाने इंग्रजीचे महत्त्व 2/3 असल्याने विद्यार्थ्याला इतिहासात व भूगोलात मिळालेल्या गुणांना प्रत्येकी 1 ने व इंग्रजीत मिळालेल्या गुणांना 2/3 ने गुणल्यास त्या विषयांना अपेक्षित महत्त्व दिल्यासारखे होईल व तसेच इतर विषयांच्या बाबतीत असेल. ज्या विद्यार्थ्यांनी या संस्थेतील नोकरीसाठी अर्ज केले आहेत त्यांचा गुणानुक्रम लावण्यासाठी त्यांनी दहावी-बोर्डाच्या परीक्षेत वरील विषयात मिळविलेल्या गुणांची नेहमीच्या पद्धतीची सरासरी (= या विषयात मिळविलेल्या गुणांची बेरीज/6) उपयोगाची नाही, कारण सर्व विषयांचे महत्त्व समान नाही. प्रत्येक विषयाचे महत्त्व, कोष्टकात महत्त्व-अंकाने दाखविले आहे. त्यामुळे प्रत्येक विषयात मिळालेल्या गुणांना त्या विषयाच्या महत्त्व-अंकाने गुणून मिळालेल्या संख्यांची बेरीज घेऊन तीला या सर्व विषयांच्या महत्त्व-अंकाच्या बेरजेने भागल्यास मिळणाऱ्या उत्तरास या विषयांची वजनी -सरासरी म्हणतात. समजा 'क्ष' या विद्यार्थ्यास इंग्रजी, मराठी, गणित, इतिहास, भूगोल व शास्त्र या विषयात अनुक्रमे 78, 80, 90, 65, 68 व 72 गुण मिळाले असल्यास

$$\text{'क्ष'ची वजनी-सरासरी} = \frac{78 \times \frac{2}{3} + 80 \times 2 + 90 \times \frac{4}{3} + 65 \times 1 + 68 \times 1 + 72 \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + 2 + \frac{4}{3} + 1 + 1 + \frac{1}{3}} = \frac{489}{19/3}$$

$$= 77.21$$

अशा प्रकारे प्रत्येक इच्छुक अर्जदाराची वजनी-सरासरी मिळवून त्यांच्या आधारे गुणवत्ता यादी तयार केली जाते.

व्यापक-दृष्टीने कोष्टक 2 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे x च्या $x_1, x_2, ..., x_n$ या n किंमती असून त्यांचे महत्त्व-अंक (= वजने) अनुक्रमे $w_1, w_2, ..., w_n$ असल्यास x च्या वजनी-सरासरीचे सूत्र आहे.

$$\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_n x_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$$

कोष्टक 2

x	x_1	x_2	x_3	...	...	...	...	...	x_n
w	w_1	w_2	w_3	...	...	...	...	...	w_n

9. समारोप : व्यवहारात निरनिराळ्या परिस्थितीत निरनिराळ्या प्रकारच्या सरासऱ्यांची जरूर भासते हे आपण विविध उदाहरणांनी बघीतले. त्या अनुषंगाने नेहमीची सरासरी म्हणजे मध्यमान आणि harmonic सरासरी, मध्यक, वजनी-सरासरी यांची माहिती आपण मिळविली. 'बहुलक', quadratic - सरासरी असे आणखीनही सरासरीचे काही प्रकार अस्तित्वात आहेत. त्यांचाही परिचय करून घेण्याचा प्रयत्न वाचकांनी करावा.

उदाहरण 1 मध्ये सरासरीसाठी छेदात मिनीट हे एकक आहे. तेथे AB, BC, CD व DA या समान अंतराच्या प्रवासासाठी निरनिराळी मिनिटे (अनुक्रमे $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ 1) लागतात व त्यामुळे (उपविभाग 6 मध्ये चर्चिल्याप्रमाणे) harmonic सरासरी योग्य उत्तर देते. ज्यांची सरासरी काढायची आहे त्या किंमती खूपच विखुरलेल्या असतील तर 'मध्यक' नामक सरासरी योग्य ठरते हे आपण उपविभाग 7 मध्ये अभ्यासिले.

10. स्वाध्याय : harmonic - सरासरी कोणत्या परिस्थितीत योग्य ठरते हे मनावर चांगल्या प्रकारे प्रकर्षाने बिंबवण्यासाठी खालील प्रश्न सोडवा आणि मूलभूत विश्लेषणाने तुमचे उत्तर बरोबर आहे का ते तपासा :

प्रश्न 1 : केळांचे तीन घड होते व प्रत्येकात 24 केळी होती. एका माणसाने पहिल्या घडातील केळी दर तासाता 4 केळी याप्रमाणे, दुसऱ्या घडातील केळी प्रत्येक तासाला 6 केळी या वेगाने आणि तिसऱ्या घडातील केळी प्रतितास 8 केळी अशा प्रकारे खाल्ली. सर्व घडांचा एकत्र विचार करता त्या माणसाने दर तासाला सरासरी किती केळी खाल्ली ?

प्रश्न २ : मोटारने प्रवास करताना पहिला संपूर्ण दिवस (= 24 तास) आम्ही 1 लिटरमध्ये 10 तास या दराने प्रवास झाला. दुसऱ्या व तिसऱ्या संपूर्ण दिवसात अनुक्रमे प्रतिलिटर २० तास आणि प्रतिलिटर ३० तास प्रवास आम्ही करू शकलो. तर हे तीन दिवस मिळून आम्ही एक लिटरमध्ये सरासरी किती तास प्रवास करू शकलो ?

✲ ✲ ✲ ✲

'To some extent, everybody is a mathematician' school mathematics must endow all students with a realisation of this fundamental truth.

- NCTM Standards.

❖

The pleasure we obtain from music comes from counting, but counting unconsciously. Music is nothing but unconscious arithmetic.

- Leibniz

❖

Whatever your difficulties in mathematics, I can assure you, mine are far Greater.

- Albert Einstein

(जानेवारी 2010)
(अंक 25, पृष्ठ 28 ते 30)

प्रा.राधा चरण गुप्ता यांचे हार्दिक अभिनंदन

M.Sc. Ph.D. F.N.A.Sc.

International Commission on History of Mathematics कडून प्रा.आर.सी.गुप्ता यांना 2009 चे Kenneth O. May Medal (U.K. चे Ivor Grattan - Guinness यांच्या समवेत) प्राप्त.

प्राध्यापक राधाचरण गुप्ता, M.Sc., Ph.D., F.N.A.Sc. (बिर्ला इन्स्टिट्यूट ऑफ टेक्नॉलॉजी (BIT), Mesra, राची येथील गणिताचे निवृत्त प्राध्यापक, जैन-गणितातील कार्याबद्दल 1998 चे Kund-kund Gnyanpitha Award प्राप्त झालेले, Indian Society for History of Mathematics च्या 'गणित-भारती'च्या खंड 1 ते 27 चे संपादक, Association of Mathematics Teachers of India चे 1994 पासून 2010 पर्यंतचे अध्यक्ष, International Academy of History of Science, Pairs चे 2002 पासूनचे सदस्य, आणि 'गणिताचा इतिहास' या विषयातील जगप्रसिद्ध संशोधक) यांचे वर उल्लेखिलेले medal मिळाल्याबद्दल 'गणित : छंद-आनंद' या मराठीतील त्रैमासिकातर्फे हार्दिक-अभिनंदन व त्यांना त्यांच्या कार्यात मन:पूर्वक शुभेच्छा. हे medal मिळताना त्यांना मिळालेले citation आम्ही खाली छापीत आहोत. त्यातून त्यांच्या कार्याची महती वाचकांना समजेल. प्रथमच हे award भारतीय व्यक्तीस मिळाले आहे याचा अभिमान वाटतो.

संपादक

CITATION

Radha Charan Gupta was born in Jhansi. Uttar Pradesh, in 1935 and recieved his B.Sc. from Lucknow University in 1955. He was the first-place medalist in the M.Sc. mathematics examination at Lucknow in 1957, and earned a Ph. D. in the history of mathematics from Ranchi University in 1971. He did his dissertation work at Ranchi with the renowned historian of Indian mathematics T.A. Saraswati Amma, author of *'Geometry in Ancient and Medieval India'*, in honor of whom he later endowed the annual Memorial Lecture of the Kerala Mathematical Association. After serving as a Lecturer at Lucknow Christian College in 1957-58, he joined the faculty in mathematics of Birla Institute of Technology, Ranchi. He bacame a full pofessor at BIT in 1982, and emeritus professor (at the mandatory retirement age of 60 years) in 1995. He currently conducts his extensive and varied reserch and service activities under the aegis of the Ganita Bharati Institute at his retirement residence in his native city of Jhansi.

Since the late 1960's, Prof. Gupta's research work has focused on the history of mathematics in India, particularly the development of trigonomenty, including interpolation rules and infinite series for trigonometric functions. Among his groundbreaking works in this field are his analysis of Paramesvara's third-order series approximation for the sine function in the fifteenth century

("An Indian form of third order Taylor series approximation of the sine", *Historia Mathematical* (1974), 287-289) and his examination of the eighth century methods of Govindāsvāmin for interpolating in sine tables ("Fractional parts of Āryabhata's sines and certain rules found in Govindasvāmin's Bhāsya on the Mahābhāskariya", *Indian Journal of History of Science* 6 (1971), 51-59). Prof. Gupta's recent publications (the whole corpus of which now totals over 500 items) include "Historiography of Mathematics in India" (ch. 18) in Dauben and Scriba, eds., *Writing the History of Mathematics : Its Historical Development* (Basel, 2002), pp. 307-315; "Area of a bow-figure in India", in Burnett et al., eds, *Studies in the History of Exact Sciences in Honour of David* Pingre (Leiden, 2004), pp. 517-532; "A little-known 19th-century study of *Ganita-sāra-saṅgraha", Arhat Vacana* 14, 2-3 (2002), 101-102.

Besides skilfully analyzing many hitherto unknown ingenious mathematical formulas in elliptical Sanskrit verses, Prof. Gupta has published several key papers on the remarkable mathematical discoveries of the Jaina tradition, many of which had been almost inaccessible to anyone except specialists in the Jaina canon in Prakrit. This "bridge-building" approach has characterized Prof. Gupta's research in general : whether explaining Sanskrit algorithms for a modern mathematical audience, surveying the twentieth-century Indian doctoral research on history of mathematics, tracing the influence of Indian mathematical discoveries in foreign traditions, or expounding Jaina, Buddhist or Hindu cosmological theories in the context of early Indian work with transfinite quantities, he has combined scrupulous textual scholarship and expert mathematical exegesis with clear and comprehensible exposition, serving the needs of general audience and specialist researcher alike. No scholar in the twentieth century has done more to advance widespread understanding of the development of Indian mathematics—and that, in a century that spanned (most of) the working lifetimes of researchers such as S. Dvivedi, B. Datta and A. N. Singh, K. S. Shukla, A. K. Bag, Saraswati Amma, David Pingree and K. V. Sarma, is saying something.

Prof. Gupta has added to his research and teaching record a long list of labors in professional service, expanding awareness of the history of mathematics in general and of Indian mathematics in particular. In 1991 he was elected a Fellow of the National Academy of Sciences, India, and in 1994 he became President of the Association of Mathematics Teachers of India, a position which he still holds. He became a Corresponding Member of the International Academy of History of Science in February 1995. In 1979 he began his decades-long service as founding editor of the journal Ganita Bhârati (“Indian Mathematics”), in which he has published scores of articles and reviews under his own name and the pen name “Ganitanand” (“joy of mathematics”). His pedagogical publications and lectures in English and Hindi, as well as his sponsorship of numerous endowed lectures, have greatly increased the prominence of history of mathematics in Indian mathematics education and scholarship. Today, we are also pleased to recognize Radha Charan

Gupta with the highest honor in the history of mathematics, the Kennth O.May Prize and Medal, awarded for lifetime scholarly achievement and commitment to the field.

(Read by ICHM Chair Prof.Karen Parshall)

या medal संबंधी कांही माहिती

In 1989, the International Commission for the History of Mathematics awarded, for the first time, the Kenneth O. May Prize in the History of Mathematics. This award honors the memory of Kenneth O.May, mathematician and historian of mathematics, who was instrumental in creating a unified international community of historians of mathematics through his tireless efforts in founding in 1971 the International Commission for the History of Mathematics and in 1974 the ICHM's journal, Historia Mathematica. The Kenneth O.May Prize has been awarded every four years since 1989 to the historian or historians of mathematics whose work best exemplifies the high scholarly standards and intellectual contributions to the field that May worked so hard to achieve. To date, the following distinguished historians of mathematics have been recognized for their work through receipt of the Kenneth O.May Prize which includes a medal cast in bronze and designed by the Canadian sculptor, Salius Jackus :

1989 : Dirk J. Struik (U.S.) and Adolf P.Yushkevieh (U.S.S.R.)

1993 : Christoph J.Scriba (Germany) and Hans Wussing (Germany)

1997 : Rene' Taton (France)

2001 : Ubiratån D'Ambrosio (Brazil) and Lay Yong (Singapore)

2005 : Henk Bos (The Netherlands)

2009 : Ivor Grattan-Guinness (U.K.) and Radha Charan Gupta (India)

✲ ✲ ✲ ✲

Life is good for only two things, discovering mathematics & teaching mathematics.

- Simeon Poisson

❖

The moving power of mathematical invention is not reasoning but imagination.

- Augustu D Morgan

(जानेवारी 2010)
(अंक 25, पृष्ठ 31 ते 34)

2 व 3 च्या घाताकांची करामत

प्रा.सु.रा.जोशी*

8 वी च्या तसेच पुढील वर्गात शिकणाऱ्या जवळ जवळ सर्वच विद्यार्थ्यांना, घातांकाची ओळख झालेली असते. घातांकांचे नियम कदाचित त्यांना माहीत नसतील. घातांकाचे उपयोग पुष्कळ आहेत. काही मोठ्या संख्या घातांकांचा उपयोग करून संक्षिप्त पणे लिहिता येतात. उदाहरणार्थ 1 च्या पुढे शंभर शून्य ही संख्या 100 चा 50 वा घातांक किंवा 10000 चा 25 वा घातांक घेऊन व्यक्त करता येते.

या लेखात आपण फक्त 2 व 3 चे निरनिराळे घातांक घेऊन प्रत्येक धनपूर्णांक संख्या, केवळ अधिक व उणे चिन्हांचा उपयोग करून कशी मांडली जाऊ शकते हे पाहणार आहोत, व याचा उपयोग, दोन पारडे असणाऱ्या तराजूला लागणारी पण व्यवहारात प्रचलित नसणारी वजने कशी मिळविता येतात हे ही सविस्तर पाहणार आहोत.

सर्व प्रथम 2 चे घातांकाचा विचार करू.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,.....इ. संख्या वास्तविक 2 चे 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... इ.अनुक्रमे घातांक आहेत. म्हणजेच $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$ इ. आपण (1, 2, 4, 8, 16, ...) या संचाला सोयी साठी A नाव देऊ म्हणजेच A = (1, 2, 4, 8, 16, ...). A हा अनंत संच आहे. तसेच नैसर्गिक संख्या किंवा धनपूर्णांकी संख्याच्या संचाला N हे नाव देऊ म्हणजेच

N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)

A मधील संख्या व '+' चिन्ह (बेरजेचे चिन्ह) यांचाच केवळ उपयोग करून N मधील प्रत्येक संख्या व्यक्त करता येते. जसे$1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $3 = 2^0 + 2^1$, $4 = 2^2$, $5 = 2^0 + 2^2$, $6 = 2^2 + 2^1$, $7 = 2^0 + 2^1 + 2^2$, $8 = 2^3$, $9 = 2^3 + 2^0$ इ. आपण 1 ते 9 पर्यंतच्या सर्व संख्या 2 चे घातांक व '+' चिन्ह यांचा उपयोग करून कशा लिहावयाच्या हे पाहिले. या गोष्टीचा उपयोग करून 10 व 10 च्या पुढील नैसर्गिक संख्या सुद्धा अशा पद्धतीने लिहिता येतात. उदाहरणार्थ

$10 = 2^3 + 2^1$, $19 = 2^4 + 2^1 + 2^0$ इ.

क्रमाने या संख्या अशा पद्धतीने लिहिणे सोपे आहे. पण एखादी मोठी संख्या उदाहरणार्थ 273, ही संख्या 2 चे घातांक व '+' चिन्ह यांचा उपयोग करून कशी मांडावयाची व तीही कमी वेळात हा प्रश्न जेव्हा आपल्या समोर उभा राहतो, तेव्हा काही वाचक गडबडू शकतात. यावर एक छान पैकी तोडगा आहे.

273 मधून A या संचातील कोणती मोठ्यात मोठी संख्या वजा करता येते व वजाबाकी मात्र 0 किंवा धन संख्या आली पाहिजे, याचा विचार करा. आपल्या लक्षात येईल की 256 ही संख्या अशी आहे की जी 273 मधून वजा केली असता वजाबाकी धन संख्यात येते. 273 - 256 = 17. म्हणजेच

273 = 256 + 17 = 256 + 16 + 1.

256, 16 व 1 या तिन्ही संख्या A मधील घटक आहेत. म्हणून आपण म्हणू शकतो की

$273 = 256 + 16 + 1 = 2^8 + 2^4 + 2^0$.

8, 'कर्मयोग', तारक कॉलनी, रामकृष्ण मिशन आश्रमासमोर, पेट्रोल पंपाच्यामागे, बीड वळण रस्ता, औरंगाबाद - 431005.

हीच गोष्ट 273 पेक्षा मोठ्या संख्या साठी सुद्धा उपयोगी पडते.

उदा. 2416 = 2048 + 368 ....(1)

= 2048+ 256 + 112 ....(2)

= 2048 + 256 + 64 + 48 ....(3)

= 2048 + 256 + 64 + 32 + 16 ....(4)

शेवटच्या पायरी पर्यंत कसे जायचे हे पुष्कळ जणांच्या लक्षात आले असेलच. पायरी क्रमांक (1) मध्ये 2048 ही A मधील मोठ्यात मोठी अशी संख्या आहे की 2416 मधून वजा होऊ शकते. पायरी क्रमांक (2) मध्ये 256 ही A ची मोठ्यात मोठी संख्या, जी 368 मधून वजा होऊ शकते. या प्रमाणे पायरी क्रमांक (4) मध्ये, उजव्या बाजूकडील सर्व संख्या A च्या घटक आहेत. काही संख्यांसाठी 2 चे 0 पासून ते ठरावीक संख्यांपर्यंतचे सर्व घातांक वापरावे लागतात. उदाहरणार्थ;

$127 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$.

मात्र जी संख्या स्वत:च A चा घटक आहे. तिच्या साठी 2 चा एकच घात पुरेसा आहे व '+' चिन्ह सुद्धा लागत नाही. उदाहरणार्थ

$8 = 2^3$, $64 = 2^6$, $128 = 2^7$, $1024 = 2^{10}$ इ.

A या संचात आपण संख्या वाढत्या क्रमाने लिहिल्या असून, 1, सोडून, प्रत्येक संख्या, तिच्या मागच्या संख्येच्या दुप्पट आहे. यामुळे संख्या एकानंतर एक वेगाने वाढत आहेत. खरे म्हणजे A मधील संख्या या एक गणित श्रेणी तयार करत असून गुणक 2 आहे.

वरील विवेचना वरून आपण खाली दिलेला सिद्धांत सिद्ध ही करू शकतो.

सिद्धांत 1 : N मधील प्रत्येक संख्या A मधील काही संख्येच्या बेरजेच्या स्वरूपात एकाच पद्धतीने मांडता येते.

एकाच पद्धतीने जेव्हा म्हटले जाते तेव्हा, दिलेल्या N मधील संख्येसाठी, A चे ठरावीक घटकच बेरजेच्या स्वरूपात येतात. उदाहरणार्थ 28 साठी 16, 8 व 4 हेच केवळ तीन घटक घ्यावे लागतात. हे घटक बेरजेच्या स्वरूपात मागे पुढे मांडले तरी चालते.

आता आपण 3 च्या घातांकाचा विचार करू. यासाठी खाली दिलेल्या B या संचाचा उपयोग होतो.

B = { 1,3,9,27,81, ...}

B हा अनंत संच असून, प्रत्येक संख्या ही 3 च्या घातांकाच्या स्वरूपात मांडता येते. जसे $1=3^0$, $27=3^3$,$81=3^4$ इ....

अधिक व उणे चिन्हांचा उपयोग करून N मधल प्रत्येक संख्या व्यक्त करता येते. उदाहरणार्थ,

$1 = 3^0$, $2 = 3^1 - 3^0$, $3 = 3^1$,

$4 = 3 + 1 = 3^1 + 3^0$, $5 = 3^2 - 3^1 - 3^0$

$17 = 27 - 32 - 3^0$, $40 = 3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0$ इ.....

जेव्हा संख्या 40 पेक्षा मोठ्या असतात तेव्हा अशा संख्या 3 च्या घातांकाच्या स्वरूपात व्यक्त करावयाच्या हा प्रश्न सोडविणे तितके सोपे नाही जितके 2 च्या घातांकाच्या बाबतीत सोपे असते. पण यासाठी ही एक तोडगा आहे. तो आपण उदाहरण

घेऊनच समाजाऊन घेण्याचा प्रयत्न करू. समजा, x = 420 ही N मधील एक संख्या आपणास दिलेली आहे. x ची दुप्पट करा. आपणास 2x = 840 ही संख्या मिळते. आता B या संचातील अशी एक मोठ्यात मोठी संख्या काढा जी 840 मधून वजा होऊ शकते व वजाबाकी 0 किंवा धन संख्या येते. या ठिकाणी $729 = 3^6$ ही संख्या तशी आहे, कारण 840 - 729 = 111

आता, x = 420 = 729-309

= 729 - Y (समजा) ....(5)

आता, 2y = 2 x 309 = 618 $243 = 3^5$

म्हणून y = 309 = 243 + 66

y ची ही किंमत (5) मध्ये ठेवा

म्हणून x = 729 - 243 - 66

= 729 - 243 - Z (समजा) ....(6)

2z = 2 x 66 = 132 $81 = 3^4$

म्हणून z = 66 = 81 - 15. ची किंमत (6) मध्ये ठेवा.

म्हणून x = 729 - 243 - 81 + 15

या प्रमाणे करीत गेल्यास आपणास शेवटी

420 = 729 - 243 - 81 + 27 - 9 - 3 हे समीकरण मिळते. वर उल्लेख केलेली रीत कशी तयार झाली याच्या खोलात मी जाऊ इच्छित नाही. पण शेवटी आपणास खाली दिलेला निष्कर्ष मिळतो.

सिद्धांत 2 :

N या संचातील कोणतीही संख्या B मधील संख्या व '+' आणि '-' या चिन्हांचा उपयोग करून मांडता येते.

सिद्धांत 1 व सिद्धांत 2, हे दोन्ही सिद्धांत सिद्ध करता येतात. यासाठी गणितातील अनुमान पद्धतीचा (Mathematical Induction) उपयोग करावा लागतो.

आता आपण सिद्धांत 1 व 2 यांचा उपयोग, साध्या तराजूला लागणारी वजने कशी मिळवायची हे पाहू.

तराजू दोन प्रकारचे असतात. एक म्हणजे ताण काटा व दुसरा म्हणजे साधा तराजू ज्यात दोन पारडी असतात(एका पारड्यात वस्तू व दुसऱ्यात वजने ठेवली जातात). ताणकाट्यासाठी वजने लागत नाहीत. ज्या वस्तूचे वजन मोजावयाचे ती वस्तू ताणकाट्यावर ठेवा किंवा अडकवा. तिचे वजन सांगणारी संख्या आपणास ताणकाट्यावर पाहावयास मिळते. आपण फक्त साध्या तराजूचा विचार करणार आहोत. यासाठी खाली दिलेला संच विचारात घ्या.

C = { 1 ग्रॅम, 2 ग्रॅम, 4 ग्रॅम, 8 ग्रॅम, 16 ग्रॅम, 32 ग्रॅम, 64 ग्रॅम,} C मध्ये एकंदर 7 वजने आहेत व सर्व वजनांची बेरीज 127 ग्रॅम भरते. 10 ग्रॅमचा एक तोळा असे गृहित धरल्यास 12 तोळे व 7 ग्रॅम एवढे होतात. C मधील केवळ 7 वजनांचाच उपयोग करून 1 पासून 127 ग्रॅम पर्यंतची कोणतीही वस्तू, तराजूचा एकदाच उपयोग करून मोजून देता येते. यासाठी सिद्धांत 1 चा उपयोग करा. समजा आपणास 25 ग्रॅम सोने किंवा तत्सम वस्तू विकत घ्यावयाची आहे. आता 25 = 16 + 8 + 1.

म्हणून तराजूच्या एका पारड्यात 16 ग्रॅम, 8 ग्रॅम, व 1 ग्रॅम, ही तीन वजने टाका, व दुसऱ्या पारड्यात सोने किंवा तत्सम वस्तू घालत राहून, दोन्ही पारडी सम पातळीत आले की वस्तूचे वजन सुद्धा 25 ग्रॅम असले पाहिजे हे उघड आहे. 1 ग्रॅम, 2 ग्रॅम, 4 ग्रॅम, इ. ऐवजी 1 किलोग्रॅम, 2 किलोग्रॅम, 4 किलोग्रॅम, अशी वजने घेतली तर आपण मोठ्या तराजूच्या साह्याने 1 ते 127 किलोग्रॅम, पर्यंत वस्तू मोजून देऊ शकतो. उदा. एखाद्याला 45 किलो गहू घ्यावयाचा असेल तर, एका पारड्यात 32 किलो ग्रॅम, 8 किलोग्रॅम, 4 किलोग्रॅम, व 1 किलोग्रॅम, अशी चार वजने टाका व दुसऱ्या पारड्यात गहू ठेऊन 45 किलो गहू तोलून देता येतो. येथे 32, 8, 4 व 1 यांची बेरीज 45 आहे. व हे अंक सिद्धांत 1 चा उपयोग करून मिळविली आहेत. तसेच 25 ग्रॅम च्या पटीत वस्तू मोजून घ्यावयाची असल्यास, वजने 25 ग्रॅम, 50 ग्रॅम, 100 ग्रॅम, इ. घेऊन आपले काम आपण पार पाडू शकतो. या सर्व प्रकारात वजने एका पारड्यात व वस्तू दुसऱ्या पारड्यात हे तत्व पाळावे लागते.

सिद्धांत 2 चा उपयोग करून आपण वजनाच्या संख्येत घट करू शकतो. यासाठी वजने ठेवण्यासाठी काही वेळा दोन्ही पारड्याचा उपयोग करावा लागतो. यासाठी खाली दिलेला संच विचारात घ्या.

D = (1 ग्रॅम, 3 ग्रॅम, 9 ग्रॅम, 27 ग्रॅम, 81 ग्रॅम, 243 ग्रॅम) यात एकंदर 6 च वजने असून, या सर्व वजनांची बेरीज(व्यावहारिक भाषा वापरली आहे) 364 ग्रॅम येते. या सहा वजनां पासून 1 ग्रॅम ते 364 ग्रॅम पर्यंत वस्तूंचे वजन तोलून देता येते. यासाठी तराजूच्या दोन्ही पारड्यांचा कधी कधी उपयोग करावा लागतो. उदाहरणार्थ एखाद्याला 14 ग्रॅम सोने घ्यावयाचे असल्यास एका पारड्यात 27 ग्रॅमचे वजन व दुसऱ्या पारड्यात 9 ग्रॅम, 3 ग्रॅम, 1 ग्रॅम, अशी तीन वजने टाकून. दुसऱ्या पारड्यात एवढे सोने टाका की जेणे करून दोन्ही पारडे सम पातळीत येतील. या पाठीमागे $14 = 27 - 9 - 3 - 1$, या नित्य समीकरणाचा उपयोग झालेला असून हे सिद्धांत 2 चा उपयोग करून मिळविले आहे. येथे दोन्ही पारड्याचा उपयोग झालेला आहे. जर 40 ग्रॅमची वस्तू मोजून द्यावयाची असेल तर $40 = 27 + 9 + 3 + 1$ याचा उपयोग करून 1 ग्रॅम, 3 ग्रॅम, 9 ग्रॅम व 27 ग्रॅम ही चार वजने एका पारडयात व दुसऱ्या पारड्यात वस्तू टाकून आपले कार्य पार पाडता येते. येथे वजनासाठी एकाच पारड्याचा उपयोग झालेला आहे कारण $40 = 1 + 3 + 9 + 27$ या समीकरणात फक्त '+' चिन्हाचा उपयोग झालेला असून एकही उणे चिन्ह नाही.

एक गोष्ट वाचकांच्या लक्षात आलेली असेल व ती म्हणजे D हा संच C पेक्षा लहान आहे. C च्या साहाय्याने 1 ग्रॅम ते 127 ग्रॅम पर्यंतची, 127 वजने मिळतात तर D च्या सहाय्याने 1 ग्रॅम ते 364 पर्यंतची 364 मिळतात तर याचा अर्थ, D या संचाचा उपयोग हा जास्त उपयुक्त आहे, कारण वजनांची संख्या कमी व उपयोग जास्त.

जर 364 ग्रॅम पेक्षा जास्त वजन असलेली वस्तू मोजून घ्यावयाची असेल तर D मध्ये वजनाची संख्या वाढवावी लागते. उदाहरणार्थ, D मध्ये आणखी दोन वजनाची भर टाकली तर एकंदर आठ वजने मिळतात व या 8 वजनाच्या साह्याने एकंदर $364 + 729 + 2187 = 3280$ इतक्या ग्रॅम पर्यंतची वस्तू मोजता येते. D मधील प्रत्येक वजन (1 ग्रॅम सोडून) मागच्या वजनाच्या तीन पट आहे हे वाचकांच्या लक्षात आलेले असेलच. जी गोष्ट D च्या बाबतीत तीच C च्या बाबतीत हि वजने वाढवून अधिकाधिक वजनाच्या वस्तू तोलता येतात. अर्थात D हा संच जास्त उपयुक्त आहे हे उघडच आहे.

व्यवहारातही अशी वजने प्रचारात आणता येऊ शकतात पण त्यासाठी सर्व समाज गणिताच्या दृष्टीकोनातून साक्षर झाला पाहिजे. प्रचलित रूढी मोडणे सोपे काम नाही.

✲ ✲ ✲ ✲

(जानेवारी **2010**)
(अंक **25**, पृष्ठ 35 ते 36)

x पाया असलेल्या संख्येचे ($x \neq 10$) दशमान सममूल्य काढणे

वाय्.डी.देशपांडे*

इयत्ता 10 वी च्या अभ्यासक्रमात 'द्विमान संख्या' हा घटक अभ्यासावा लागतो. त्यात द्विमानसंख्येचे दशमान सममूल्य ठरविण्यासाठी एक पद्धत दिलेली आहे खालील उदाहरण पहा.

प्रचलीत पद्धत

उदा. $[11100101]_2 = [?]_{10}$

व्दिमान संख्येचे विस्तारित रूप म्हणजेच त्या संख्येचे दशमान सममूल्य असते

$$[11100101]_2 = [(2^7 \times 1) + (2^6 \times 1) + (2^5 \times 1) + (2^4 \times 0) + (2^3 \times 0) + (2^2 \times 1) + 1]_{10}$$

$$= [229]_{10}.$$

नवीन पद्धत

उदा 1 खालील पद्धतीने देखील सोडविता येते.

2	1	1	1	0	0	1	0	1
		2	6	14	28	56	114	228
	1,	3,	7,	14,	28,	57,	114,	229

$$\therefore [11100101]_2 = [229]_{10}.$$

(i) या पद्धतीमध्ये द्विमान अंक योग्य अंतर घेऊन मांडले आहेत.

(ii) दिलेली द्विमान संख्या $x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + 1$ या x युक्त बहुपदीचे सहगुणकरूप आहे असे मानून आणि बहुपदीला (x - 2) ने भागून येणारी बाकी संश्लेषक भागाकार पद्धतीने काढलेली आहे. ही बाकी म्हणजेच द्विमान संख्येचे दशमान सममूल्य असते.

(iii) या पद्धतीत द्विमान संख्येचा पाया 2 असल्यामुळे संश्लेषक भागाकार करताना भाजकस्थानी 2 हा अंक घेतला आहे ही बाब वाचकांनी ध्यानात घ्यावी.

(iv) या पद्धतीला द्विमान संख्येचे दशमान सममूल्य ठरविण्याची 'संश्लेषक भागाकार पद्धत' म्हणूया.

पाया 8 असलेल्या संख्येचे (Octal Number) दशमान सममूल्य याच पद्धतीने ठरवू.

उदा. 2 : $[3\ 2\ 6\ 5]_8 = [\ ?\ ]_{10}$

8	3	2	6	5
		24	208	1712
	3	26	214	1717

$$\therefore [3\ 2\ 6\ 5]_8 = [1\ 7\ 1\ 7]_{10}$$

19' श्रद्धा, कोहिनूर आर्केडच्या मागे, निगडी चौक, निगडी, पुणे 44

पाया 16 असलेल्या संख्येचे (Hexa-decimal) दशमान सममूल्य ठरविणे.

उदा. 3 : $[9\ 3\ 2\ c]_{16} = [\ ?\ ]_{10}$

टीप : वरील संख्येत c हे अक्षर 12 हा अंक दर्शविते.

16	9	3	2	12
		144	2352	37664
	9	147	2354	37676

$\therefore [9\ 3\ 2\ c]_{16} = [3\ 7\ 6\ 7\ 6]_{10}$

10 व्यतिरिक्त कोणताही पाया असलेल्या संख्येचे दशमान सममूल्य ठरविण्यासाठी ही पद्धत अत्यंत सुलभ आहे. परंतु या पद्धती मागील गणिती मिमांसा (Mathematical Reasoning) पाहणे तितकेच आवश्यक आहे.

★ ★ ★ ★

समजा, p ही x पाया असलेल्या संख्याप्रणालीतील n अंकी नैसर्गिक संख्या असून संख्येतील अंक $a_1, a_2, ..., a_n$ आहेत

p ही संख्या खालीलप्रमाणे लिहिण्याची प्रथा आहे.

$p = [a_n\ a_{n-1} ..... a_2\ a_1]\ x$ ....[1]

p या संख्येतील प्रत्येक अंकाची स्थानिक किंमत भिन्न असून ती खालीलप्रमाणे ठरवितात.

a_n या अंकाची स्थानिक किंमत $= x^{n-1} \times a_n$

टीप : n ही संख्या अंकाचा संख्येतील अनुक्रमांक दर्शविते (उजवीकडून डावीकडे मोजल्यास) अंकाची स्थानिक किंमत दशमान संख्या असते. p_x या संख्येचे विस्तारित रूप खालीलप्रमाणे लिहितात.

$p_x = [(x^{n-1} \times a_{n1}) + (x^{n-2} \times a_{n-1}) + ... + (x^1 \times a_2) + (x^0 \times a_1)]_{10}$

संख्या कोणत्याही प्रणालीशी संबंधित असली तरी तिचे विस्तारित रूप तिचे दशमान सममूल्य असते.

समजा $(q)_x = [3265]_x$ ही x पाया असलेली नैसर्गिक संख्या आहे.

$(q)_x = [3x^3 + 2x^2 + 6x + 5]_{10}$ ....(3)

$3x^3 + 2x^2 + 6x + 5$ ही x युक्त बहुपदी आहे. व x ची अंकात्मक किंमत बहुपदीत ठेवून $(q)_x$ चे दशमान सममूल्य ठरविता येते.

बहुपदीत x = 8 ठेवून मिळणारी किंमत म्हणजेच $[3\ 2\ 6\ 5]_8$ या अष्टमान (octal) संख्येचे दशमान सममूल्य असते. आणि हीच पद्धत प्रचलित आहे. परंतु शेषसिद्धांतानुसार

x युक्त बहुपदीत x = a ठेवून मिळणारी बहुपदीची किंमत आणि बहुपदीला (x - a) ने भागिले असता मिळणारी भागाकारातील बाकी समान असते आणि ही बाकी Horner या गणितज्ञाच्या संश्लेषक भागाकार पद्धतीने देखील काढता येते.

म्हणून कोणताही पाया असलेल्या संख्येचे दशमान सममूल्य संश्लेषक भागाकार पद्धतीने ठरविता येते.

✲ ✲ ✲ ✲

गणित अध्ययन-अध्यापन विकसन संस्था व नाशिक जिल्हा गणित अध्यापक संघ, नाशिक. पारितोषिक वितरण समारंभ

कै.रा.गो.कुंटे तृतीय स्मृतिदिन.

रविवार दि.21/02/2010 रोजी नाशिकरोडच्या आरंभ महाविद्यालयात दु.ठीक 3.30 वा. हा समारंभ सुरु झाला. या कार्यक्रमास अध्यक्ष म्हणून नाशिक शिक्षण प्रसारक मंडळाचे कार्याध्यक्ष मा.श्री.महेशजी दाबक व प्रमुख पाहुणे म्हणून नाशिक शिक्षण प्रसारक मंडळाचे कार्यवाह मा.श्री.अरुण पैठणकर उपस्थित होते. प्रथम या मान्यवरांच्या हस्ते सरस्वती पूजनाने कार्यक्रमास सुरुवात झाली. कोठारी कन्या शाळेच्या पर्यवेक्षका मा.सौ.प्रतिभा भवाळकर यांनी ईशस्तवन सादर केले.

गणित अध्ययन-अध्यापन विकसन संस्थेच्या कार्याचा परिचय, या कार्यक्रमा मागची भूमिका, उद्देश आपल्या प्रास्ताविकातून सर्व मान्यवरांसमोर संस्थेच्या उपाध्यक्षा मा.सौ.गोळे यांनी सादर केली. गणित अध्ययन-अध्यापन विकसन संस्थेतर्फे घेण्यात येणाऱ्या इ. 6 वी व 9 वी गणित कौशल्य परीक्षेसाठी मार्गदर्शक असे पुस्तक संस्थेतर्फे तयार करण्यात आले. या पुस्तकाचे प्रकाशन मान्यवरांच्या हस्ते करण्यात आले. या पुस्तकात ज्या लेखकांनी लेख लिहिले त्यांचा सत्कार करण्यात आला. यात श्री. गोटखिंडीकर, सौ.नाखरे, श्रीमती बापट यांचा तर या पुस्तकनिर्मितीस विशेष सहकार्य करणाऱ्या आदरणीय शिंगणे सरांचाही सत्कार करण्यात आला.

कार्यक्रमास उपस्थित मान्यवरांचा परिचय नाशिक जिल्हा गणित अध्यापक संघाचे कार्यवाह श्री.पी.एम्. कुलकर्णी यांनी करुन दिला.

कार्यक्रमाचा मुख्य भाग होता तो बी.एस्.सी. परीक्षेत गणित विषयात पुणे विद्यापीठात प्रथम आलेल्या विद्यार्थिनीचा सत्कार. यंदाचा (2009-2010) हा मान बारामतीच्या तुळजाराम चतुरचंद्र कॉलेजच्या कु.वर्षा हंबीरराव शिंदे या विद्यार्थिनीने मिळविला. रोख 3000/- रु. मानचिन्ह, प्रशस्तीपत्रक असे या पुस्तकाचे स्वरुप होते. कु. वर्षा तिच्या पालकांसह या कार्यक्रमास उपस्थित होती. सत्कारास उत्तर देतांना तिने संस्थेच्या कार्याचा गौरव केला.

कार्यक्रमाचे प्रमुख पाहुणे मा.श्री.अरुण पैठणकर यांनी आपले मनोगत व्यक्त करतांना आदरणीय कुंटे सरांच्या स्मृतींना उजाळा दिला. कुंटे सरांविषयी अतिशय आदराचे उद्गार त्यांनी काढले त्याचबरोबर बक्षीसपात्र सहभागी विद्यार्थ्यांचे अभिनंदन केले.

गणित अध्ययन अध्यापन विकसन संस्थेचे अध्यक्ष मा.डॉ.शरदचंद्र पेठे यांनीही आपल्या मनोगतातून बक्षीसपात्र तसेच सर्व सहभागी विद्यार्थ्यांचे अभिनंदन केले.

कार्यक्रमाच्या यशस्वितेसाठी ज्यांचे सहकार्य लाभले त्या सर्वांचे आभार श्री.वाणी सरांनी मानले. कार्यक्रमास मा.श्री.भुजबळ सर, भास भामरे, श्री.नाखरे, श्री.गर्गे, सौ.कवीश्वर,..... या सर्वांचे मोलाचे सहकार्य व मार्गदर्शन लाभले. या कार्यक्रमास गणितप्रेमी पालक, शिक्षक, विद्यार्थी उपस्थित होते.

✲ ✲ ✲ ✲